

ЗАРУБЕЖНЫЕ
СТАТИСТИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ



**СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
ЭКОНОМЕТРИИ**

•

Э. МАЛЕНКО



ЗАРУБЕЖНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

MÉTHODES STATISTIQUES DE L'ÉCONOMÉTRIE

EDMOND MALINVAUD

Deuxième édition

●
DUNOD PARIS
1969

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМЕТРИИ

Э. МАЛЕНВО



Перевод с французского А. И. Гладышевского и Г. А. Фреймана

Научное редактирование Б. Н. Михалевского и И. Ш. Амирова

Выпуск 2



Москва «СТАТИСТИКА» 1976

ЗАРУБЕЖНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ (ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ) ИССЛЕДОВАНИЯ

З. С. И.

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Введение в теорию порядковых статистик.

П. М а с с е. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений.

Г. Т е й л. Экономические прогнозы и принятие решений.

Г. Х а р м а н. Современный факторный анализ.

Н. Дрейпер, Г. Смит. Прикладной регрессионный анализ.

М. Кендэл. Ранговые корреляции.

Э. Маленво. Статистические методы эконометрии. Вып. 1.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Л. З а к с. Статистическое оценивание.

Редакционная коллегия

А. Я. Боярский, А. Г. Волков, Н. К. Дружинин, Э. Б. Ершов, Б. Л. Исаев, Я. Б. Кваша, В. М. Кудров, В. В. Налимов, Т. В. Рябушкин (председатель).

М $\frac{10805*-014}{008(01)-76}$ 116-76

© перевод на русский язык, «Статистика», 1976.

* Второй индекс — 10803.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй том русского перевода книги Э. Маленво «Статистические методы эконометрии» содержит четвертую и пятую части французского оригинала, объединяющие последние десять глав. Гл. 10—15 посвящены статистическому анализу временных экономических рядов. Главным объектом анализа в остальных главах являются проблемы, связанные со статистической оценкой параметров линейных эконометрических моделей из нескольких регрессионных уравнений.

Конструирование именно таких моделей становится в последнее время одним из основных этапов в конкретном экономическом прогнозировании, хотя такой подход позволяет лишь в определенных рамках статистически идентифицировать те сложные взаимозависимости, которые присущи различным сторонам сложных экономических процессов. В последние годы западными эконометристами было предложено множество подобных моделей. Однако очень часто вызывает сомнение даже сама корректность применения выбранных авторами моделей статистических методов оценивания параметров таких систем, состоящих иногда из нескольких сотен регрессионных уравнений.

Содержание пятой части книги, несомненно, даст читателю достаточно точное представление о том, насколько может быть правомерным серьезное отношение к выводам, получаемым на основе анализа подобных «монстров».

В гл. 11 ставится вопрос об излишней жесткости основной гипотезы о случайных ошибках — их некоррелируемости для разных моментов времени. Для иллюстрации возникающих при этом статистических проблем в гл. 11 и 12 автор дает тематический (целевой) обзор теории и методов статистического анализа случайных процессов с дискретным временем. Особое внимание здесь уделяется методам расчета и интерпретации спектральных характеристик как изолированных, так и нескольких взаимовлияющих временных рядов динамики. Читатель, желающий углубить полученные здесь представления о возможностях применения техники спектрального анализа для моделирования структуры рядов экономических данных, может обратиться к более полной в этом отношении работе К. Гренджера и М. Хатанаки «Спектральный анализ временных рядов в экономике» (М., «Статистика», 1972).

В 13 главе автор рассматривает гипотезу о существовании зависимостей между случайными ошибками для разных моментов времени

в уравнениях регрессии, которая существенным образом искажает свойства оценок параметров, полученных обычным методом наименьших квадратов.

Однако содержание главы не ограничивается простым рассмотрением примеров, иллюстрирующих несовершенство классических оценок. Ценно то, что автор рекомендует ряд процедур оценивания, позволяющих (в большинстве конкретных ситуаций) учесть фактор зависимости ошибок.

Здесь же приведено обоснование алгоритма критерия Дарбина — Уотсона для проверки гипотезы о независимости ошибок, имеющей большое применение в практических расчетах. Подробные таблицы для распределения статистики Дарбина — Уотсона можно найти в приложениях к книгам С. Л и з е р. «Эконометрические методы и задачи» (М., «Статистика», 1971); Г. Т е й л. «Экономические прогнозы и принятие решений» (М., «Статистика», 1971).

В процессе конструирования конкретных регрессионных моделей в экономических исследованиях очень часто случается так, что некоторая экзогенная переменная в модели является на самом деле сдвинутой во времени эндогенной переменной. Свойства таких моделей, называемых авторегрессионными, анализируются в гл. 14. Наряду со спектральными методами аппарат авторегрессионных уравнений часто используют для улавливания циклических колебаний.

Тот факт, что реакции на те или иные изменения независимых факторов происходят в экономике с некоторыми запаздываниями, предопределил интерес к изучению в эконометрии моделей с распределенными лагами. В гл. 15 дается детальный обзор различных представлений для функций распределения запаздывающих значений, которые наиболее часто применяются в прикладных исследованиях. Методы оценки соответствующих коэффициентов представлены, на наш взгляд, достаточно полно.

В гл. 16 и 17 на конкретных примерах подчеркиваются основные трудности, которые возникают при экстраполяции принципов построения и оценки регрессионных моделей на системы взаимозависимых линейных регрессий. Подобные модели характеризуются тем свойством, что одни и те же эндогенные переменные могут присутствовать в разных уравнениях системы. Эта особенность взаимозависимых систем делает классический метод наименьших квадратов практически неприменимым для оценки параметров (отдельно к каждому уравнению модели). С другой стороны, усложнение алгебраической структуры модели (по сравнению с обычной множественной регрессией) порождает проблему идентификации, которая подробно обсуждается в гл. 18. Дело в том, что конечной целью построения систем из нескольких регрессионных уравнений является получение из первоначальной (структурной) формы так называемого *приведенного* вида модели, который и дает конкретное представление эндогенных величин в зависимости от изменения экзогенных. Однако такое преобразование не всегда осуществимо единственным образом, так как число параметров в обеих формах в общем случае не одинаково.

В связи с этим в гл. 18 вводится необходимое и достаточное условие существования взаимно-однозначного соответствия между приведенной и структурной формами (критерий идентифицируемости).

Сложная статистическая задача по оцениванию параметров взаимозависимых систем является объектом анализа последних двух глав (19 и 20). Особый интерес здесь представляют методы максимального правдоподобия с полной и ограниченной информацией и двухшаговый метод наименьших квадратов, наиболее часто применяемые для прикладного экономического моделирования. Приходится сожалеть, что излишне громоздкое изложение существа этих методов автор не сопровождал (как и в других главах) конкретными примерами.

Присоединяясь к оценке, высказанной в предисловии к первому тому, мы выражаем уверенность в том, что монография Э. Маленво будет интересной и полезной для преподавателей вузов, аспирантов, научных работников, имеющих математическую подготовку и встречающихся в своей работе с различными аспектами применения методов математической статистики в экономических исследованиях.

И. Ш. АМИРОВ

ВЫРАВНИВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

●

ГЛАВА 11. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Временные связи в эконометрических моделях

Количественная оценка макроэкономических законов достигается обычно с помощью наблюдений, приуроченных к последовательным периодам времени: ряды статистических индексов производства, цен или торговли; данные национальных счетов для ряда лет и т. д. При этом наблюдения располагаются в определенном порядке. Например, для переменной x_t :

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{it}, \dots, x_{iT}.$$

В трех предыдущих частях книги порядок расположения данных не принимался в расчет. Мы постулировали, что каждый период не зависит от предыдущих, почти всегда предполагая справедливость следующих гипотез. Обычно принималось, что для ошибок ε_t некоторого периода действует закон распределения вероятностей, независимый от законов распределения ошибок предыдущих периодов. Предполагалось также, что в модель входят эндогенные переменные лишь одного периода и что не существует явной связи между вектором x_t и вектором x_{t-1}, x_{t-2}, \dots , для предыдущих моментов времени.

На практике эти гипотезы слишком ограничительны. Они оправдываются лишь педагогическими соображениями, отодвигающими рассмотрение временных связей на более поздний период. Перейдем теперь к рассмотрению случаев, в которых эти гипотезы не удовлетворяются. Для лучшего понимания возникающих при этом трудностей необходимо изучить достаточно общим образом зависимости между упорядоченными во времени случайными величинами. Этим определяется план настоящей части. Гл. 11 и 12 будут посвящены изложению теории и статистическому анализу случайных процессов. Лишь после этого снова будут рассмотрены модели со случайными возмущениями в уравнениях.

Теория случайных процессов, которой посвящена эта глава, составляет важную часть теории вероятностей. Не стремясь к углуб-

ленному ее изложению, мы будем довольствоваться формулировкой основных определений и зависимостей, подчеркивая лишь те, которые будут наиболее полезны в дальнейшем анализе. В противоположность изложению других глав в данной главе доказательства не даются, поэтому серьезное изучение теории случайных процессов должно производиться по другим работам¹.

2. Случайные величины и случайные функции

Для введения понятия случайного процесса стоит напомнить вначале пригодное для обобщений определение случайной величины.

Пусть дано множество N , элементы которого e называются «состояниями». На N определен закон распределения вероятностей P . Таким образом, становится известна вероятность $P(E)$, сопоставленная определенным подмножествам E из N . Можно считать, что некоторое неизвестное состояние \bar{e} из N является «истинным состоянием», получающимся на практике, и что $P(E)$ представляет вероятность того, что E содержит \bar{e} . Иногда говорят, что N и P образуют *категорию испытаний*, причем каждое испытание дает с вероятностью $P(E)$ некий исход e , содержащийся в E .

Например, испытание может состоять из пяти независимых последовательных бросков игральной кости с шестью гранями. Исход или состояние будет представлено упорядоченным множеством из пяти чисел, каждое из которых содержится между 1 и 6 (числа, нанесенные на грани кости), например 4, 3, 5, 1, 1. Каждое состояние имеет вероятность 6^{-5} . Подмножество E из N может быть, к примеру, образовано событиями, для которых сумма чисел равна 7, а $P(E)$ равно тогда 15×6^{-5} .

Случайная величина, определенная на категории состояний (N, P) ², — это функция X или $X(e)$, которая каждому событию e ставит в соответствие число x (в нашем примере случайная величина задается суммой чисел на гранях кости). Итак, чтобы задать случайную величину, нужно задать категорию испытаний и числовую функцию на N .

Закон распределения вероятностей случайной величины X — это по определению функция $F(u)$, равная вероятности $P(E)$ множества \bar{E} , образованного такими событиями e , что $X(e) \leq u$. Можно записать³:

$$F(u) = P[X(e) \leq u],$$

где $F(u)$ — неубывающая функция u , изменяющаяся от 0 до 1.

¹ Теория случайных процессов является предметом обсуждения во многих книгах. Для углубления знаний по вопросам, затронутым в настоящей главе, и получения исчерпывающей библиографии читатель может обратиться к [31] и [198]. Близкое к принятому в настоящей книге изложение дано в [325].

² Здесь автор имеет в виду пространство состояний N , на котором определена вероятностная мера P . — *Прим. ред.*

³ Вполне строгое введение случайной величины должно учитывать дополнительное условие измеримости функции $X(e)$, а именно, каждое множество вида $\{e : X(e) \leq u\}$ должно иметь вероятность.

Распределение $F(u)$ оказывается достаточным для определения вероятностных характеристик X , рассматриваемых изолированно; причем ссылки на категорию испытаний не обязательны и их часто опускают.

Однако распределения F_X и F_Y , относящиеся к двум случайным величинам X и Y , определенным на одном и том же множестве событий, не достаточны для определения вероятностных свойств совокупности этих двух переменных. Для этого нужно знать распределение $F(u, v)$ пары (X, Y) , заданное в виде:

$$F(u, v) = P[X(e) \leq u; Y(e) \leq v].$$

Когда $F(u, v)$ равно произведению $F_X(u)$ и $F_Y(v)$, говорят, что X и Y *независимы*. Последний случай является, очевидно, особым.

Изучение временных рядов предполагает рассмотрение *последовательностей* чисел с некоторыми вероятностными характеристиками. Легко представить себе методы получения подобных вероятностных последовательностей. Так, можно рассматривать произведение заданной последовательности на случайную величину, например, $X(e) \cos t$ для $t = 1, 2, \dots$. Можно также изучать последовательность независимых случайных величин, скажем, $X_1(e_1), X_2(e_2), \dots, X_t(e_t), \dots$

либо сумму двух или нескольких последовательностей, полученных с помощью того или иного из предыдущих методов, например $X(e) \cos t + X_t(e_t)$.

Первоначальные исследования временных рядов эффективно вдохновлялись этой точкой зрения. Предполагалось «разложить» каждый ряд так, чтобы получить элементарные составляющие, интерпретация которых в терминах случайных величин была бы простой. Этот подход будет изучен лишь в следующей главе. Упомянутые методы, однако, не приводят к общему определению случайных последовательностей и не соответствуют целям настоящей главы.

Проще обобщить понятие случайной величины, вводя «случайные функции» и «случайные последовательности». Значение случайной величины является результатом испытания. Аналогично последовательность значений, определяемых случайным процессом, можно рассматривать как результат *одного испытания*. Исходя из этой точки зрения приходится вводить достаточно богатое множество событий. В рассмотренном выше примере случайной величины одно испытание состояло из пяти последовательных и независимых бросаний игральной кости. Для некоторых случайных процессов испытание может состоять из неограниченного числа последовательных и независимых бросаний. Таков, например, случай процесса $X(e) \cos t + X_t(e_t)$, в котором состояние характеризуется одновременно элементом e и последовательностью e_t . Обобщая, приходим к следующему определению.

Случайная функция, определенная на множестве Θ и категории испытаний (N, P) , — это функция $X(e, t)$, которая сопоставляет каждому событию e функцию $x(t)$, определенную на Θ . Случайный процесс — это случайная функция, для которой Θ является либо последовательностью целых положительных чисел, либо последователь-

ностью всех целых чисел. Для данного значения t_0 переменной t , $X(e, t_0)$ является, очевидно, случайной величиной.

Так, если испытание состоит из пяти бросаний кости, случайный процесс может быть образован последовательностью знаков десятичной дроби, полученной делением на число π суммы полученных чисел. Если испытание состоит из бесконечной последовательности бросаний, то могут быть, например, образованы два случайных процесса: А. Сумма чисел, полученных от первого до t -го бросания; Б. Сумма чисел, полученных при бросаниях с номерами $t - 1$ и t .

Свойства случайной величины можно изучать с помощью ее функции распределения. Аналогично вероятностные свойства случайного процесса можно изучать по его функциям распределения. Последние получаются так же, как и распределение конечного множества случайных величин, определенных на одном и том же множестве событий. Если дано конечное число значений t , например t_1, t_2, \dots, t_q , распределение $F(t_1, t_2, \dots, t_q; u_1, u_2, \dots, u_q)$ для q случайных величин $X(e; t_1), X(e; t_2), \dots, X(e; t_q)$ есть по определению вероятность $P(E)$ множества E таких состояний, что одновременно имеют место неравенства ¹:

$$X(e; t_1) \leq u_1, X(e; t_2) \leq u_2, \dots, X(e; t_q) \leq u_q.$$

Итак, существует столько распределений, сколько имеется множеств (t_1, t_2, \dots, t_q) . Каждое из них является неубывающей функцией со значениями между 0 и 1 от q аргументов u_1, u_2, \dots, u_q .

Очевидно, эти распределения подчиняются определенным правилам согласования.

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2; u_1, u_2) &= F(t_2, t_1; u_2, u_1), \\ F(t_1; u_1) &= \lim_{u_2 \rightarrow \infty} F(t_1, t_2; u_1, u_2) \end{aligned}$$

3. Стационарные процессы

При изучении случайных процессов особо важное место занимают процессы, свойства которых остаются инвариантными при любых перемещениях вдоль оси времени.

Точнее, процесс $X(e; t)$ называется стационарным, если

$$\begin{aligned} F(t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots, t_q + \theta; u_1, u_2, \dots, u_q) &\equiv \\ &\equiv F(t_1, t_2, \dots, t_q; u_1, u_2, \dots, u_q) \end{aligned} \quad (1)$$

тождественно относительно $\theta; t_1, t_2, \dots, t_q; u_1, u_2, \dots, u_q$ каково бы ни было q .

Для иллюстрации этого определения рассмотрим график со значениями t по оси абсцисс и $x(t)$ по оси ординат. Как результат одного

¹ Точное определение случайной функции должно включать условие измеримости функции $X(e, t)$ от аргумента e . Рассматриваемое здесь множество E в этом случае должно иметь вероятность. Наиболее точная формулировка этого условия и является одной из главных проблем строгого изложения теории случайных функций.

испытания случайный процесс примет последовательность значений, которую можно изобразить на графике. Говорят еще, что речь идет о *реализации* процесса (см. прерывистую ломаную). Если даны последовательности чисел u_1, u_2, \dots, u_q и моментов времени t_1, t_2, \dots, t_q (которые предполагаем для простоты следующими друг за другом), можно сопоставить им ломаную U (см. непрерывную ломаную). Распределение $F(t_1, t_2, \dots, t_q; u_1, u_2, \dots, u_q)$ дает вероятность того, что реализация x_t остается полностью ниже ломаной U .

Условие (1) означает, что эта вероятность не изменяется, когда ломаная U перемещается параллельно оси абсцисс. Иначе говоря,

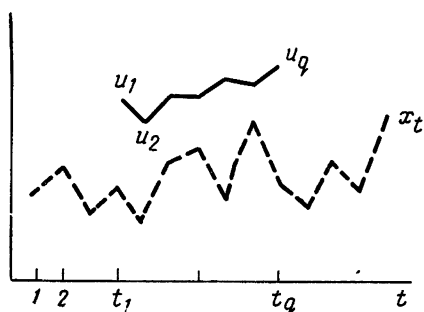


Рис. 1

распределения в интервалах $[t_1 + \theta, t_q + \theta]$ и $[t_1, t_q]$ совпадают.

Нетрудно проверить, что пример *Б* предыдущего параграфа определяет стационарный случайный процесс, в то время как пример *А* соответствует нестационарному процессу. Далее в настоящей главе будут рассматриваться почти исключительно стационарные процессы.

«Чисто случайный процесс» по определению образуется последова-

тельностью независимых случайных величин с одним и тем же распределением $F(u)$. Закон распределения этого процесса получается сразу, так как в этом случае:

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, \dots, t_q; u_1, u_2, \dots, u_q) &= \\ &= F(u_1) \cdot F(u_2) \cdot \dots \cdot F(u_q). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что этот процесс стационарен.

Исходя из распределения одной случайной величины или конечного множества случайных величин можно определить простые характеристики. Чаще всего используются моменты первого и второго порядков. Точно так же можно рассматривать моменты первого и второго порядков случайного процесса, а именно

$$m(t) = E[X(t)], \quad (3)$$

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]\}. \quad (4)$$

Первое из этих математических ожиданий вычисляется с помощью распределения $F(t; u)$, второе — с помощью распределения $F(t_1, t_2; u_1, u_2)$. В принципе возможно, что некоторые из этих математических ожиданий не существуют.

Однако мы ограничимся здесь рассмотрением процессов, для которых все моменты первого и второго порядков существуют.

Если процесс стационарен, условие (1) означает, что $F(t; u)$ не зависит от t и $F(t_1, t_2; u_1, u_2)$ зависит от разности $t_2 - t_1$, но не от t_1 или t_2 в отдельности. Момент первого порядка, определенный равенством (3), не зависит тогда от t . Его можно обозначить просто m .

Момент второго порядка зависит лишь от $\theta = t_2 - t_1$. Его можно назвать *автоковариацией* порядка θ (корреляционной функцией) и обозначить γ_θ . Обычно, впрочем, полагают:

$$\gamma_0 = \sigma^2, \gamma_\theta = \rho_\theta \gamma_0.$$

Итак, характеристики первого и второго порядков случайного стационарного процесса следующие: среднее значение m , дисперсия σ^2 , «коррелограмма», состоящая из последовательности «коэффициентов автокорреляции» ρ_θ . Коррелограмму обычно изображают ломаной линией на графике, где по оси абсцисс наносятся значения θ , а по оси ординат — значения ρ_θ . Нетрудно установить, что

$$|\rho_\theta| \leq 1, \rho_0 = 1.$$

Коррелограмма чисто случайного процесса особенно проста, так как все коэффициенты автокорреляции равны нулю (кроме ρ_0). «Процессом без корреляции» называют процесс, в котором все ρ_θ , кроме ρ_0 , равны нулю. Существуют, очевидно, процессы без корреляций, которые не являются чисто случайными (так же, как корреляция между двумя случайными величинами может быть равна нулю без того, чтобы эти величины были независимы).

При изучении случайных стационарных процессов зачастую ограничиваются анализом характеристик первого и второго порядков. Коррелограмма играет тогда особо важную роль. Следует, впрочем, напомнить, что два процесса могут иметь одно и то же среднее значение, одну и ту же дисперсию и одинаковые коррелограммы, не имея при этом одинаковых распределений.

Для свойств, зависящих лишь от характеристик первого и второго порядков, требование стационарности, определенное условием (1), является слишком жестким. Поэтому рассматривают также *стационарные процессы второго порядка* (стационарные процессы в широком смысле), иначе говоря, такие, для которых $m(t)$ и $\gamma(t, t + \theta)$ имеют значения, не зависящие от t .

4. Спектральное представление

Для задания характеристик второго порядка стационарного случайного процесса вводят либо коррелограмму, либо другое математическое понятие — «спектр». Аналогично в статистическом анализе временных рядов оценивают либо коррелограмму, либо спектр. Поэтому важно хорошо понять природу соответствия между ними. В этом параграфе будет дано определение спектра, показана его

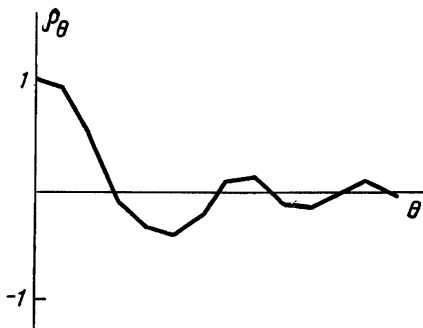


Рис. 2

полезность для представления процесса и рассмотрены некоторые примеры¹.

Используя общие принципы преобразований Фурье, можно доказать, что последовательности автоковариаций $\{\gamma_\theta\}$ всегда можно сопоставить действительную функцию $F(\omega)$ числовой переменной ω , такую, что

$$\gamma_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta\omega} dF(\omega), \quad (5)$$

где i — мнимое число $\sqrt{-1}$. Эту функцию, называемую «спектром» процесса, можно, очевидно, выбрать так, что $F(0) = 0$. Она является монотонно возрастающей. Для любого действительного процесса функция нечетна, $F(-\omega) = -F(\omega)$, так что интеграл в соотношении (5) действителен. Тогда можно записать:

$$\gamma_\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos \theta\omega dF(\omega), \quad (6)$$

причем принимается, что $dF(0)$ равно половине скачка функции $F(\omega)$ в точке 0. Таким образом, для определения спектра достаточно задаться значениями $F(\omega)$ на отрезке $[0, \pi]$. (Обозначение $F(\omega)$ является общепринятым; при этом не следует его смешивать с $F(u)$ — общепринятым обозначением для распределения случайной величины.)

В интересующих нас случаях функция $F(\omega)$ будет иметь производную, называемую *спектральной плотностью*. Обозначим ее $f(\omega)$. Тогда можно подставить выражение $f(\omega) d\omega$ вместо $dF(\omega)$ в формулы (5) и (6).

Функцию $F(\omega)$ можно вычислить с помощью последовательности γ_θ по формуле

$$F(\omega) = \frac{\gamma_0 \omega}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{\gamma_\theta}{\theta} \sin \theta\omega, \quad (7)$$

которая применима при сходимости ряда в правой части. Аналогично спектральная плотность $f(\omega)$ удовлетворяет соотношению (если она существует и если ряд сходится):

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta=-\infty}^{\infty} \gamma_\theta \cos \theta\omega. \quad (8)$$

Формула (6) показывает, как спектр определяет последовательность автоковариаций или аналогично коррелограмму γ_θ/γ_0 . Выражение $\cos \theta\omega$ определяет периодическую последовательность с периодом $2\pi/\omega$, за исключением случая $\omega = 0$, когда она постоянна. Изменение спектра $dF(\omega)$ в точке ω определяет вклад этой последовательности в разложение $\{\gamma_\theta\}$ на периодические составляющие.

¹ Читатель найдет в гл. 1 книги [127] короткие, но ясные доказательства результатов, приведенных в настоящем параграфе.

Рассмотрим следующие простые примеры.

1) Пусть задан тривиальный процесс $X(t) = X$, который принимает постоянное значение во времени, хотя априори это значение является случайным. Величины γ_θ равны. Формулы (5) и (6) удовлетворяются, если

$$F(\omega) = \frac{\gamma_0}{2}$$

для $\omega > 0$ и $F(\omega)$ определяется значением $-\frac{\gamma_0}{2}$ при $\omega < 0$. Спектр — постоянная функция с одним скачком величины γ_0 в точке $\omega = 0$. В представление $\{\gamma_\theta\}$ входит одна постоянная последовательность.

2) Пусть задан *чисто случайный процесс* $X(t)$. Все его автоковариации равны нулю, кроме γ_0 . Формулы (7) и (8) показывают, что спектр является линейной функцией и его спектральная плотность равна постоянной $\gamma_0/2\pi$. В спектральном представлении $\{\gamma_\theta\}$ все частоты одинаково существенны.

3) Пусть задан процесс:

$$X(t) = A \cos(\alpha t + \Phi), \quad (9)$$

в котором амплитуда A и фаза Φ синусоидального движения являются случайными величинами, в то время как частота α фиксирована, отлична от нуля и принадлежит сегменту $[-\pi, \pi]$. Для изучения правой части уравнения (9) удобно ее рассматривать как действительную часть $Ze^{i\alpha t}$, где случайная величина Z равна:

$$Z = Ae^{i\Phi}. \quad (10)$$

Для стационарности процесса (9) нужно, очевидно, чтобы математическое ожидание действительной части Z было равно нулю. Даже если $E(Z) = 0$, необходимо еще, чтобы автоковариации (4) зависели лишь от отклонения $t_1 - t_2$. Можно вычислить:

$$\begin{aligned} E[X(t_1)X(t_2)] &= \cos \alpha(t_1 - t_2) \times \\ &\times E[A^2 \cos^2(\alpha t_1 + \Phi)] - \sin \alpha(t_1 - t_2) \times \\ &\times E[A^2 \cos(\alpha t_1 + \Phi) \sin(\alpha t_1 + \Phi)]. \end{aligned}$$

Без особых предположений относительно распределения пары (A, Φ) эта величина не будет независимой от t_1 . Она будет таковой, если Φ не зависит от A и распределена по равномерному закону в сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда $\gamma_\theta = \frac{1}{2}E(A^2) \cos \alpha\theta$. Формула (6) показывает, что спектр равен нулю в интервале $(-\alpha, \alpha)$ и равен $E(A^2)/4$ вне этого интервала.

4) Интересно рассмотреть процесс типа (9), сохраняя преимущества, связанные со стационарностью, и не налагая особых ограничений на распределение (A, Φ) , т. е. на распределение Z . Для этого *следует обобщить введенные в предыдущем параграфе понятия на случайные процессы или на случайные функции со значениями в комплексной плоскости*,

Математическое ожидание $m(t)$ комплексного случайного процесса $Z(t)$ определяется, очевидно, обычным образом. Для его автоковариаций равенство (4) заменяется на

$$\gamma(t_1, t_2) = E \{ [Z(t_1) - m(t_1)] \overline{[Z(t_2) - m(t_2)]} \}, \quad (11)$$

причем черта над $Z(t_2) - m(t_2)$ обозначает, как обычно, сопряженное комплексное число¹.

Изучим, в частности, процесс:

$$Z(t) = Ze^{iat}, \quad (12)$$

где Z определяется равенством (10). Его действительная часть соответствует (9), а мнимая часть соответствует $A \sin(\alpha t + \Phi)$. Если Z имеет нулевое математическое ожидание, тогда $m(t) = 0$, и можно вычислить:

$$\gamma(t_1, t_2) = E(Z\bar{Z}) e^{i\alpha(t_1 - t_2)}. \quad (13)$$

Процесс (12), таким образом, является стационарным второго порядка, если $E(Z) = 0$, но без других ограничений на закон распределения пары (A, Φ) . Вообще говоря, он не является стационарным в строгом смысле, т. е. условия типа (1) не удовлетворяются. Но в данном случае это не имеет большого значения.

Математическое ожидание, входящее в выражение (13), есть дисперсия амплитуды A действительной и мнимой частей $Z(t)$. Последовательность автоковариаций γ_θ является произведением этой дисперсии и последовательности $e^{i\alpha\theta}$. Формула (5) показывает, что спектр $F(\omega)$ можно еще определить как постоянную функцию, обращаемую в нуль при $\omega = 0$ и имеющую скачок амплитуды $E(A^2)$ при $\omega = \alpha$.

5) Рассмотрим теперь комплексный процесс:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k e^{i\omega_k t}, \quad (14)$$

в котором ω_k — фиксированные углы, принадлежащие сегменту $[-\pi, \pi]$, в то время как Z_k — комплексные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и нулевыми ковариациями $E(Z_k \bar{Z}_h)$ для любых $h \neq k$, имеющие вид:

$$Z_k = A_k e^{i\Phi_k}. \quad (15)$$

Действительная часть этого процесса является, таким образом, суммой n некоррелированных между собой синусоидальных составляющих с различными периодами.

Применяя формулу (11), вычисляем:

$$\gamma_\theta = \sum_{k=1}^n E(A_k^2) e^{i\theta\omega_k}. \quad (16)$$

¹ Это определение — существенное для излагаемой ниже спектральной теории — представляется естественным, так как из него следует, что дисперсия $Z(t)$ равна дисперсии модуля $Z(t) - m(t)$.

Сравнивая с формулой (5), выводим, что последовательность автоковариаций имеет спектральное представление, в котором $F(\omega)$ есть кусочно-постоянная функция с n скачками для значений ω , равных ω_k , причем величина каждого скачка равна дисперсии амплитуды соответствующей синусоидальной составляющей.

Заметим, что γ_0 являются действительными числами, если множество n углов ω_k состоит из $n/2$ пар противоположных углов ($p = 1, 2, \dots, n/2$ и $-\omega_{2p-1} = \omega_{2p} > 0$) и если амплитуды, соответствующие углам одной и той же пары, имеют равные дисперсии: $E(A_{2p-1}^2) = E(A_{2p}^2)$. Тогда можно записать:

$$\gamma_0 = 2 \sum_{p=1}^{n/2} \cos \gamma_{\omega_{2p}} E(A_{2p}^2). \quad (17)$$

Это соотношение имеет ту же форму, что и (6).

Обратно предположим, что спектр некоторого действительного стационарного процесса $X(t)$ второго порядка будет кусочно-постоянной функцией с $2p$ скачками для $\omega = \omega_k$. Известно, что существует комплексный процесс формы (14), имеющий те же автоковариации, частоты синусоидальных составляющих которого определены положением скачков спектра, а дисперсии их амплитуд — величиной скачков. Можно доказать более глубокое свойство: действительному процессу $X(t)$ можно сопоставить n случайных некоррелированных между собой комплексных величин Z_k , таких, что $X(t)$ равно линейной комбинации членов в правой части (14). Например, мы видели, что процесс (9) является стационарным второго порядка, если Φ не зависит от A и имеет равномерный закон распределения на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда этот процесс представим в форме (14), где $n = 2$, $\omega_1 = -\alpha$, $2Z_1 = Ae^{-i\Phi}$, $2Z_2 = Ae^{i\Phi}$. Можно проверить, что $4E(Z_1\bar{Z}_2) = E(A^2) \cdot E(e^{2i\Phi}) = 0$, так как $E \cos 2\Phi = E \sin 2\Phi = 0$.

Итак, изучение спектра процесса — представления Фурье последовательности его автоковариаций — обеспечивает метод существенного анализа самого процесса: процесс может рассматриваться как сумма составляющих весьма частной формы, рассмотренной выше в примере (3).

Этот результат обобщается на любой стационарный процесс второго порядка с произвольной формой спектра. В самом деле, применяя представления Фурье к случайным процессам и функциям, докажем, что любому стационарному процессу $X(t)$ второго порядка можно сопоставить случайную комплексную функцию $Z(\omega)$, определенную на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющую условиям:

$$E[Z(\omega_1) - Z(\omega_2)] = 0, \quad (18)$$

$$E\{[Z(\omega_1) - Z(\omega_2)][\overline{Z(\omega_1) - Z(\omega_2)}]\} = F(\omega_2) - F(\omega_1), \quad (19)$$

$$E\{[Z(\omega_1) - Z(\omega_2)][\overline{Z(\omega_3) - Z(\omega_4)}]\} = 0 \quad (20)$$

для любой последовательности чисел

$$-\pi \leq \omega_1 \leq \omega_2 < \omega_3 \leq \omega_4 \leq \pi.$$

Так как функция $Z(\omega)$ удовлетворяет (20), она называется функцией с «некоррелированными приращениями». В самом деле, корреляция между приращениями в двух непересекающихся интервалах $[\omega_1, \omega_2]$ и $[\omega_3, \omega_4]$ равна нулю. Процесс $X(t)$ и функция $Z(\omega)$ связаны равенством:

$$X(t) - m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega). \quad (21)$$

Возможность такого представления свидетельствует о том, что процесс $X(t) - m$ можно рассматривать как сумму синусоидальных последовательностей со случайными амплитудами и фазами. Две синусоидальные составляющие входят с некоррелированными амплитудами. Если $F(\omega)$ имеет скачок в точке ω_0 , то представление Фурье процесса включает частоту ω_0 с амплитудой, имеющей конечную дисперсию. Если $F(\omega)$ имеет производную $f(\omega)$ на малом интервале $[\omega_1, \omega_2]$, то эта производная определяет среднее квадратическое значение амплитуды, с которой «полоса частот» входит в представление Фурье, возможное для каждой реализации процесса.

Когда спектр состоит из кусочно-постоянной функции, процесс можно записать в виде суммы конечного числа синусоидальных составляющих. Наоборот, когда спектр непрерывно возрастает на некотором интервале, спектральное представление процесса содержит бесконечное число частот (все те, которые относятся к рассматриваемому интервалу).

Предположим, что наблюдается реализация процесса до некоторого определенного момента T и предлагается дать прогноз будущей эволюции этой реализации. Возможный метод прогноза состоит в отыскании разложения Фурье наблюдаемой части (содержащей T периодов) и в использовании этого разложения для экстраполяции на значения времени, превосходящие T .

Если спектр является кусочно-постоянной функцией и если T достаточно велико, разложение Фурье даст все частоты $\omega_1, \omega_2, \dots$, соответствующие скачкам спектра с их амплитудами a_1, a_2, \dots и их фазами ϕ_1, ϕ_2, \dots в рассматриваемой реализации. Экстраполяция в этом случае будет выполнена без погрешности. Процесс подобного вида входит в категорию *детерминированных* процессов (см. ниже § 7).

Наоборот, для процесса с непрерывным в некоторых интервалах спектром представление Фурье для наблюдаемого периода любой длительности не позволяет обычно произвести точную экстраполяцию изучаемой реализации, так что оно недостаточно для определения значений производной $Z(\omega)$ для каждой частоты. Как увидим в § 8, можно тем не менее дать неполный прогноз будущей эволюции некоторой реализации процесса с непрерывным спектром¹.

¹ По поводу связи между спектральным представлением и детерминированным характером процесса читатель может обратиться к [320, с. 198—201].

5. Скользящие средние¹

Теперь будут изучены характеристики второго порядка процессов, полученных с помощью некоторых линейных преобразований, примененных к процессу без корреляции.

Представим стационарный процесс без корреляции в виде последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t, \dots$$

Предположим еще,

$$E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2.$$

Случайный процесс x_t , определенный равенством:

$$x_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_h \varepsilon_{t-h}, \quad (22)$$

где a_0, a_1, \dots, a_h — фиксированные числа, называют «процессом со скользящими средними».

Нетрудно вычислить:

$$E(x_t x_{t-\theta}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{h-\theta} a_i a_{i+\theta}, \text{ если } \theta \leq h, \quad (23)$$

$$E(x_t x_{t-\theta}) = 0, \text{ если } \theta > h.$$

Вследствие этого *коррелограмма* $\{\rho_\theta\}$ *будет равна 0, начиная со значения* $\theta = h + 1$. Существует, однако, зависимость между последовательными значениями x_t , так как $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$, вообще говоря, не равны 0. Эта зависимость придает процессу со скользящими средними периодический вид. Изучим на примере, как обстоит дело в этом случае.

Пусть процесс без корреляции $\{\varepsilon_t\}$ получается с помощью последовательности независимых бросаний монеты и принимает значение 1, когда выпадает «орел», и значение -1 , когда выпадает «решка». Пусть задан процесс со скользящими средними значениями:

$$x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_{t-2} + 2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-4}. \quad (24)$$

Пусть некоторая реализация $\{\varepsilon_t\}$ дает последовательность:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

(приведенные значения читаются построчно). Ей соответствует следующая реализация $\{x_t\}$:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & -2 & -4 & -4 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -4 & -2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

¹ Начиная с этого параграфа мы будем обозначать переменные и случайные процессы строчными буквами, что не должно вызывать путаницы

Графическое представление этой реализации выявляет периодичность, весьма сходную с той, которая встречается в некоторых экономических последовательностях (см. рис. 3).

Легко определить коррелограмму и спектр процесса, описанного соотношением (24). Можно без труда вычислить:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 14, \gamma_1 = 12, \gamma_2 = 8, \gamma_3 = 4, \\ \gamma_4 &= 1, \gamma_5 = \gamma_6 = \dots = 0.\end{aligned}$$

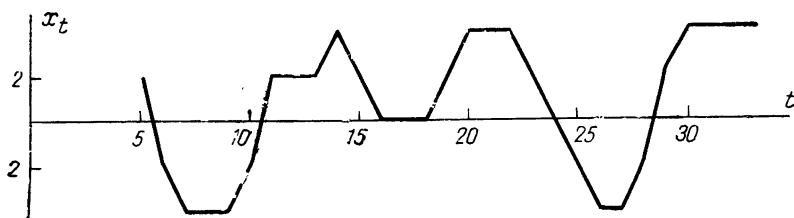


Рис. 3

С другой стороны, формула (8) приводит здесь к равенству:

$$\pi f(\omega) = 7 + 12\cos \omega + 8\cos 2\omega + 4\cos 3\omega + \cos 4\omega.$$

График спектральной плотности показывает, что она принимает особенно большие значения для малых величин ω , соответствующих

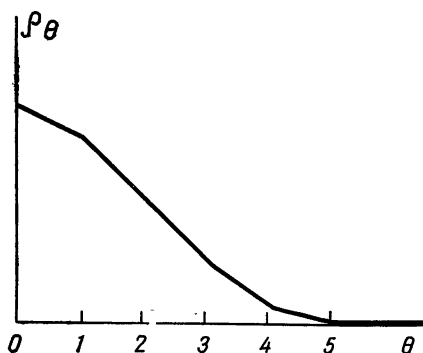


Рис. 4

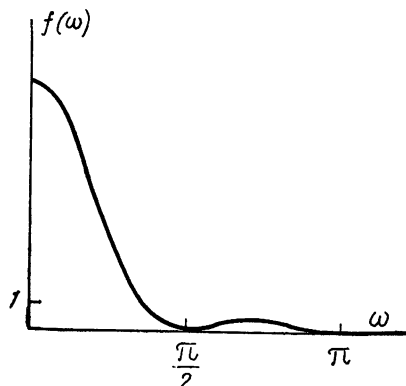


Рис. 5

периодам большим, чем 8 (см. рис. 5). Разложение Фурье всей реализации даст, таким образом, существенную амплитуду для длинных периодов. Фактически в нашем случае периодичность порядка 9.

Итак, вычисление скользящих средних значений для чисто случайных последовательностей приводит к осциллирующей последовательности. Этот факт весьма важен для статистического изучения временных рядов. В самом деле, нередко для исключения случайной составляющей некоторой последовательности вычисляют скользящие средние за более или менее длительный период. Этот метод уменьшает

существенность случайной составляющей, но не исключает ее полностью. В частности, если речь идет об изучении циклических флуктуаций, выравнивание с помощью скользящих средних выявляет, кроме систематических колебаний компоненты, искусственные колебания, обязанные своим происхождением единственно самому статистическому методу. Это явление называется именем математика, его изучавшим, «*эффектом Слущкого*» ([279], см. также [339]).

Пусть задан стационарный случайный процесс $\{x_t\}$, имеющий непрерывный спектр с производной $f_x(\omega)$.

Рассмотрим новый случайный процесс $\{y_t\}$, определенный соотношением:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_h x_{t-h}. \quad (25)$$

Процесс $\{y_t\}$ получается из $\{x_t\}$ с помощью линейного преобразования, которое можно рассматривать как обобщенный метод нахождения скользящих средних. (Процесс со скользящими средними получился бы при сумме величин a_τ , равной 1.) Такой линейный оператор для перехода от одного процесса к другому обычно называют *линейным фильтром*; этот термин ассоциируется с физическими явлениями, которые впервые изучались с помощью преобразований этого типа.

Рассмотрим спектральное представление процесса $\{x_t\}$, заданное формулой (21), и обозначим через $Z_x(\omega)$ соответствующую случайную функцию. Подстановка этого представления в уравнение (25) показывает, что случайная функция $Z_y(\omega)$, относящаяся к процессу $\{y_t\}$, удовлетворяет соотношению:

$$dZ_y(\omega) = \sum_{\tau=0}^h a_\tau e^{-i\omega\tau} dZ_x(\omega) \quad (26)$$

или

$$dZ_y(\omega) = T(\omega) dZ_x(\omega), \quad (27)$$

где функция $T(\omega)$ называется *передаточной функцией фильтра* и определяется соотношением:

$$T(\omega) = \sum_{\tau=0}^h a_\tau e^{-i\omega\tau}. \quad (28)$$

С другой стороны, формула (19) показывает, что

$$f_x(\omega) = \lim_{d\omega \rightarrow 0} \frac{E |dZ_x(\omega)|^2}{d\omega}. \quad (29)$$

Из (27) следует тогда, что $E |dZ_y(\omega)|^2 / d\omega$ имеет предел, равный

$$f_y(\omega) = |T(\omega)|^2 f_x(\omega).$$

Таким образом, процесс $\{y_t\}$ имеет спектральную плотность $f_y(\omega)$. $G(\omega) = |T(\omega)|^2$ называют еще *усилением фильтра* и записывают:

$$f_y(\omega) = G(\omega) f_x(\omega). \quad (30)$$

Для вычисления усиления фильтра по формуле, определяющей фильтр, достаточно использовать равенство:

$$G(\omega) = \left| \sum_{\tau=0}^h a_{\tau} e^{i\omega\tau} \right|^2. \quad (31)$$

Формула (30) дает способ получения спектра для $\{y_t\}$ из спектра для $\{x_t\}$ и обратно. Для каждого значения ω спектральная плотность для $\{x_t\}$ умножается на множитель, который зависит только от характеристик фильтра. Частоты, для которых $G(\omega)$ имеют большие значения, усилены, для которых $G(\omega)$ малы, — ослаблены.

В качестве примера рассмотрим уже введенный для определения процесса скользящих средних фильтр (24), описываемый равенством:

$$y_t = x_t + 2x_{t-1} + 2x_{t-2} + 2x_{t-3} + x_{t-4}.$$

Без труда вычисляем:

$$G(\omega) = |1 + 2e^{i\omega} + 2e^{2i\omega} + 2e^{3i\omega} + e^{4i\omega}|^2 = 4(1 + 2\cos\omega + \cos 2\omega)^2;$$

$$G(\omega) = 14 + 24\cos\omega + 16\cos 2\omega + 8\cos 3\omega + 2\cos 4\omega.$$

В частности, если $\{x_t\}$ чисто случайный процесс, к которому применимо скользящее среднее (24), то $f_x(\omega)$ является постоянной, равной $1/2\pi$. Спектральная плотность, заданная формулой (30), совпадает с плотностью, которая получена непосредственно для процесса (24).

6. Авторегрессионные и гармонические процессы

В этом параграфе будут изучены стационарные случайные процессы, удовлетворяющие линейному соотношению вида:

$$x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_h x_{t-h} = \varepsilon_t, \quad (32)$$

где величины b_θ — фиксированные числа и $\{\varepsilon_t\}$ — некоррелированный стационарный процесс с нулевым средним значением; иногда это может быть последовательность, тождественно равная 0.

Соотношение (32) есть уравнение в конечных разностях для процесса $\{x_t\}$. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами классического вида, за исключением того, что член, стоящий справа, является случайным. Следуя обычным методам, рассмотрим уравнение без свободного члена:

$$x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_h x_{t-h} = 0 \quad (33)$$

и найдем решение в форме:

$$x_t = z^t. \quad (34)$$

Комплексная переменная z будет решением уравнения:

$$z^h + b_1 z^{h-1} + b_2 z^{h-2} + \dots + b_h = 0. \quad (35)$$

Можно различить три типа корней этого уравнения.

1) Корни по модулю больше 1. Последовательность решений (34) расходится при неограниченном возрастании t .

2) Корни по модулю равны 1. Соответствующие решения (34) являются осциллирующими и имеют вид:

$$\cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Впрочем, для кратных корней, равных по модулю 1, будут существовать также расходящиеся решения вида:

$$t^a z^t.$$

3) Корни по модулю меньше 1. Решения (34) стремятся тогда к 0 при неограниченном возрастании t .

Стационарный случайный процесс, дающий решение уравнения (33), называется «гармоническим процессом». Он является обязательно линейной комбинацией (со случайными коэффициентами) решений вида z^t (или $t^a z^t$ в случае кратных корней). Для стационарности процесса необходимо, чтобы в решение входили лишь члены $\cos \omega t + i \sin \omega t$, соответствующие корням уравнения (35), модуль которых равен 1, с коэффициентами, неравными тождественно 0. Гармонический действительный процесс запишется тогда в виде:

$$x_t = \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + m, \quad n \leq h/2$$

(мнимые члены обращаются в 0, так как они являются линейными комбинациями составляющих, соответствующих двум комплексным сопряженным корням). В этой формуле частоты ω_k соответствуют решениям уравнения (35), а амплитуда a_k и фазы φ_k (и среднее значение m , если корнем (35) будет 1) являются случайными величинами.

С гармоническими процессами мы уже встречались, изучая спектральные представления. У этих процессов спектр является кусочно-постоянной функцией. Их детерминированный характер проявляется уже в формуле (33), с помощью которой можно вычислять значение x_t при известных значениях $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-h}$. В силу формулы (6) их коррелограмма совпадает с таковой для суммы конечного числа синусоидальных составляющих. Значение $|\rho_\theta|$ коэффициентов автокорреляции не стремится к нулю при неограниченном возрастании θ .

Стационарный случайный процесс, являющийся решением уравнения (18) (с не равным тождественно нулю вторым членом), называется «авторегрессионным процессом». В действительности следует различать два случая: тот, в котором процесс $\{e_t\}$ есть чисто случайный, и тот, в котором он является лишь процессом без автокорреляции.

Если $\{e_t\}$ — чисто случайный процесс, условное математическое ожидание x_t можно вычислить по формуле (если известны все $x_{t-\tau}$ для $\tau > 0$)

$$E(x_t/x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = -b_1 x_{t-1} - b_2 x_{t-2} \dots - b_h x_{t-h}. \quad (36)$$

Но x_t нельзя точно предсказать, так как существует случайное возмущение e_t . Авторегрессионный процесс является, таким образом, недетерминированным.

Применение спектрального представления к формуле (32) приводит непосредственно к равенству:

$$\sum_{\tau=0}^h b_{\tau} e^{-i\omega\tau} dZ_x(\omega) = dZ_{\varepsilon}(\omega), \quad (37)$$

где $b_0 = 1$ и $Z_{\varepsilon}(\omega)$ — спектральная функция для $\{\varepsilon_t\}$.

Если полином

$$B(z) = \sum_{\tau=0}^h b_{\tau} z^{\tau} \quad (38)$$

не имеет корней с модулем 1, можно записать:

$$dZ_x(\omega) = T(\omega) dZ_{\varepsilon}(\omega) \quad (39)$$

с передаточной функцией

$$T(\omega) = \left[\sum_{\tau=0}^h b_{\tau} e^{-i\omega\tau} \right]^{-1}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что процесс $\{x_t\}$ имеет спектральную плотность:

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{\tau=0}^h b_{\tau} e^{i\omega\tau} \right|^{-2}, \quad (41)$$

где σ^2 — дисперсия ε_t .

В случае, когда все корни уравнения (35) по модулю меньше 1, т. е. все корни $B(z)$ имеют модули, большие 1, можно найти последовательность действительных чисел a_{τ} , позволяющую получить разложение в ряд:

$$\left[\sum_{\tau=0}^h b_{\tau} z^{\tau} \right]^{-1} = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} z^{\tau}. \quad (42)$$

Этот ряд сходится в единичном круге комплексной плоскости. (Если z_h являются корнями $B(z)$, левый член (42) можно записать в виде произведения постоянных величин и множителей $(1 - z/z_h)^{-1}$, которые разлагаются в сходящиеся ряды. Произведение разложений, соответствующих двум сопряженным корням, содержит лишь действительные члены.) При этих условиях¹ можно записать:

$$T(\omega) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} e^{-i\omega\tau}. \quad (43)$$

¹ Можно отметить следующее. Пусть задан авторегрессионный стационарный процесс $\{x_t\}$, т. е. процесс, удовлетворяющий соотношению вида (32) с такими b_{τ} , что корни уравнения (35) по модулю больше 1. Для такого процесса существует другое авторегрессионное представление, т. е. такие c_{τ} (для $\tau = 1, 2, \dots, h$) и такой процесс $\{y_t\}$ без автокорреляции, что соотношение, аналогичное (32), будет удовлетворяться, а соотношение, соответствующее (35), будет иметь все корни, меньшие 1 по модулю, причем в этом случае c_{τ} заменяют b_{τ} и y_t заменяют ε_t (см., например, [137, гл. 1, § 3]).

Уравнение (39) и спектральные представления процессов дают тогда разложение:

$$x_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_\tau \varepsilon_{t-\tau} + \dots \quad (44)$$

Процесс $\{x_t\}$ оказывается тогда скользящим средним процесса $\{\varepsilon_t\}$, причем оно включает, вообще говоря, последовательность всех значений ε_τ до $\tau = t$.

Этот результат можно получить другим способом. В самом деле, можно попытаться построить случайный процесс $\{x_t\}$ для $t = -T + 1, -T + 2, \dots$ и т. д. через рекуррентное соотношение (32) исходя из чисто случайного процесса $\{\varepsilon_t\}$ и начальных условий, фиксированных или случайных, для $x_{-T}, x_{-T-1}, \dots, x_{-T-h}$. С точки зрения теории статистики важно задаться вопросом, при каких условиях заданный подобным образом процесс стремится к стационарному процессу, являющемуся решением (38). Для изучения этой тенденции можно предположить, что T неограниченно возрастает. Почти очевидно, что процесс не будет сходиться, если уравнение (33) без второго члена, применяемое к тем же начальным условиям, приводит к решению, не стремящемуся к 0. Это имеет место, если все корни уравнения (35) не будут меньше 1 по модулю. Наоборот, в [325] доказана сходимость к стационарному процессу в случае, когда все корни уравнения (35) имеют модули, меньшие 1. Формула (44) определяет, таким образом, величину, полученную предельным переходом для x_t при неограниченном возрастании T .

Из формулы (44) непосредственно выводим:

$$\gamma_\theta = E(x_t x_{t+\theta}) = \sigma^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} a_\tau a_{\tau+\theta}.$$

Более того, так как процесс $\{x_t\}$ имеет спектральную плотность, то γ_θ стремится к 0 вместе с θ (общий член ряда, фигурирующий в правой части (8), должен стремиться к 0 вместе с θ для любого ω).

В качестве примера рассмотрим наиболее простой авторегрессионный процесс:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (45)$$

Из условий стационарности следует:

$$|\alpha| < 1,$$

так как уравнение (35) имеет единственный корень. Процесс (45) можно записать еще в виде:

$$x_t = \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + \alpha^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha^\tau \varepsilon_{t-\tau} + \dots$$

Отсюда выводим:

$$E(x_t x_{t-\theta}) = \frac{\alpha^\theta \sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

и

$$\rho_\theta = \alpha^\theta.$$

Так как $|\alpha| < 1$, коррелограмма стремится к нулю.

7. Линейное представление

В анализе стационарных случайных процессов часто встречаются процессы со скользящими средними — гармонические и авторегрессионные процессы. Для этого, как мы увидим, имеются глубокие причины. Начнем с некоторого обобщения данных ранее определений.

Стационарный процесс, определенный для всех целых значений t , называется «детерминированным», если существует последовательность чисел $b_1, b_2, \dots, b_\tau, \dots$, такая, что

$$x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_\tau x_{t-\tau} + \dots = 0 \quad (46)$$

тождественно по t . Иначе говоря, процесс $\{x_t\}$ является детерминированным, если возможно вычислить каждое значение x_t как предел некоторой бесконечной линейной комбинации предыдущих значений x_θ (для $\theta < t$) в той же реализации. Как только вычислено x_t , можно вычислить x_{t+1} , затем x_{t+2} и т. д. Итак, в каждый момент будущую эволюцию реализации можно полностью определить, если известна вся его предшествующая эволюция.

Уравнение (46) обобщает зависимость (33), справедливую для гармонических процессов. Характеристики детерминированных процессов аналогичны характеристикам гармонических процессов. В частности, их спектры являются дискретными множествами (обычно в бесконечном числе) и не возрастают непрерывно ни в каком интервале.

Стационарный процесс $\{x_t\}$ с нулевым математическим ожиданием, определенный для всех целых значений t (положительных, отрицательных или равных нулю), называется *линейным*, если существует чисто случайный процесс $\{e_t\}$ и последовательность таких чисел $a_1, a_2, \dots, a_\tau, \dots$, что

$$\sum_{\tau=1}^T a_\tau^2 \quad (47)$$

сходится при неограниченном возрастании T и

$$x_t = e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \dots + a_\tau e_{t-\tau} + \dots \quad (48)$$

тождественно по t . Стационарный процесс с неравным нулю математическим ожиданием m называется линейным, если таковым является процесс $\{x_t - m\}$. Поэтому для упрощения будем полагать, что $m = 0$.

Сходимость (47) приводит к сходимости в формуле

$$G(\omega) = \left| \sum_{\tau=0}^{\infty} a_\tau e^{i\tau\omega} \right|^2, \quad (49)$$

где $a_0 = 1$. Линейный процесс $\{x_t\}$ имеет, таким образом, спектральную плотность $\sigma^2/2\pi G(\omega)$, где σ^2 — дисперсия e_t .

Большая часть линейных процессов имеет также авторегрессионное представление, это означает, что существует такая последова-

тельность чисел $b_0 = 1, b_1, b_2, \dots, b_\tau, \dots$, что

$$x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_\tau x_{t-\tau} + \dots = \varepsilon_t. \quad (50)$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция

$$A(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_\tau z^\tau$$

была аналитической в открытом кольце, содержащем *круг* единичного радиуса комплексной плоскости, и чтобы она не имела в нем ни одного нуля. Числа b_τ являются тогда коэффициентами при z^τ при разложении функции $[A(z)]^{-1}$ в ряд Тейлора.

Можно просто определить процесс с конечным скользящим средним, не имеющий авторегрессионного представления. Достаточно так выбрать a_τ , чтобы уравнение $A(z) = 0$ имело хотя бы один корень, модуль которого был бы равен 1. Наиболее простой пример дается равенством:

$$x_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}.$$

Такие процессы могут рассматриваться, как предельные случаи. В дальнейшем мы не будем специально останавливаться на них. Впрочем, оказывается, что процессы в эконометрии часто задаются непосредственно в их авторегрессионной форме.

Для линейного процесса с авторегрессионным представлением со значениями x_τ , известными для всех $\tau < t$, условное математическое ожидание $E(x_t/x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ является бесконечной линейной комбинацией этих значений. Так же обстоит дело и для $E(x_{t+1}/x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ и в более общем случае для $E(x_{t+\theta}/x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$. Таким образом, как только все значения x_τ до момента t становятся известными, можно «прогнозировать» будущую эволюцию реализации. Но этот прогноз неизбежно будет содержать погрешности и станет мало-помалу менее интересным по мере удаления от t . В самом деле, $E(x_{t+\theta}/x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ будет стремиться к $E(x_{t+\theta}) = E(x_t)$, когда θ будет стремиться к бесконечности¹.

Уравнения (48) и (50) обобщают аналогичные соотношения для процессов со скользящими средними и авторегрессионных процессов. Линейные процессы, впрочем, дают характеристики, которые мы уже встречали для авторегрессионных процессов: непрерывный спектр и коррелограмму $\{\rho_\theta\}$, стремящиеся к нулю при неограниченном возрастании θ . Эти свойства характеристик второго порядка все еще справедливы, если процесс $\{x_t\}$ является лишь «*линейным второго порядка*», т. е. если соотношение (48) удовлетворяется лишь для некоррелированного, а не чисто случайного процесса $\{\varepsilon_t\}$.

С помощью разложения спектра в [325] доказано, что *любой имеющий коррелограмму стационарный процесс $\{x_t\}$ можно разложить на два процесса $\{y_t\}$ и $\{z_t\}$, не коррелированных между собой, и таких,*

¹ Этот вопрос будет рассмотрен более систематически в следующем параграфе.

что $\{y_t\}$ будет линейным второго порядка и $\{z_t\}$ детерминированным. Точнее,

$$x_t = y_t + z_t$$

и

$$E\{y_t - E(y_t)\} \{z_\theta - E(z_\theta)\} = 0$$

тождественно по t и θ . Составляющая $\{y_t\}$ имеет спектром непрерывную часть спектра $\{x_t\}$.

8. Прогноз для стационарных процессов

Изучим в общем виде «прогноз» для значений x_{T+1} , x_{T+2} , ..., $x_{T+\theta}$, ... исходя из известных предыдущих значений x_T , x_{T-1} , ...

Если процесс детерминирован, можно использовать уравнение (46); если он авторегрессионный второго порядка, используется уравнение (50). Теорема Волда гарантирует, что эти два случая разрешают рассматривать любые обладающие коррелограммой стационарные процессы, кроме тех, которые имеют представления как процессы со скользящими средними, но не имеют авторегрессионного представления.

В той мере, в какой экономический процесс можно рассматривать стационарным, прогноз некоторой известной детерминированной составляющей не представляет никакой трудности. Мы можем, таким образом, ограничиться изучением авторегрессионных процессов второго порядка.

Мы упростим проблему, предполагая, что: 1) любая последовательность значений процесса известна до x_T (т. е. для изменяющихся от $-\infty$ до T); 2) мы располагаем авторегрессионным представлением процесса; 3) ε_t являются не только некоррелированными между собой, но также взаимно независимыми.

В экономических моделях эти гипотезы на практике не порождают серьезных затруднений. Очень часто процесс задается своим линейным представлением¹. С другой стороны, тот факт, что мы знаем лишь конечную последовательность значений x_t , не представляется затруднительным, так как удаленные от t периоды входят в прогноз лишь с очень малым весом (см. ниже). Уравнение (50) записывается в виде:

$$x_t = b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_\tau x_{t-\tau} + \dots + \varepsilon_t \quad (51)$$

с ε_t , определяющими стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и без автокорреляции. Если $m \neq 0$, формулы приме-

¹ Существуют, очевидно, математические способы определения линейного представления недетерминированного процесса. Поисками этих методов занимался Н. Винер [322], который изучил, как линейное представление может быть выведено из спектра процесса. По этому поводу читатель может обратиться к [320].

няются к процессу, описываемому отклонениями $x_t - m$. Тогда можем записать:

$$x_{T+1} = u_{T+1}^1 + \varepsilon_{T+1},$$

где

$$u_{T+1}^1 = E(x_{T+1}/x_T, x_{T-1} \dots) = b_1 x_T + b_2 x_{T-1} + \dots$$

Если x_{T+1}^P является прогнозом величины x_{T+1} , математическое ожидание квадрата отклонения относительно реализованной величины равно:

$$E[x_{T+1}^P - x_{T+1}]^2 = E[x_{T+1}^P - u_{T+1}^1]^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

так как корреляция между ε_{T+1} и u_{T+1}^1 равна нулю. Прогноз, минимизирующий математическое ожидание ошибки, дается выражением

$$x_{T+1}^P = u_{T+1}^1 = E(x_{T+1}/x_T, x_{T-1} \dots).$$

Аналогично можно записать:

$$x_{T+2} = u_{T+2}^2 + \xi_{T+2}^2,$$

где

$$u_{T+2}^2 = E(x_{T+2}/x_T, x_{T-1} \dots) = b_1 u_{T+1}^1 + b_2 x_T + b_3 x_{T-1} + \dots$$

и

$$\xi_{T+2}^2 = \varepsilon_{T+2} + b_1 \varepsilon_{T+1}.$$

Корреляция между ξ_{T+2}^2 и u_{T+2}^2 равна тогда нулю. Отсюда выводим, как и раньше, «наилучший» прогноз для x_{T+2} :

$$x_{T+2}^P = u_{T+2}^2 = E(x_{T+2}/x_T, x_{T-1} \dots).$$

Таким образом, получаем:

$$x_{T+\theta}^P = u_{T+\theta}^0 = E(x_{T+\theta}/x_T, x_{T-1} \dots), \quad (52)$$

с помощью рекуррентной формулы

$$u_{T+\theta}^0 = b_1 u_{T+\theta-1}^{0-1} + b_2 u_{T+\theta-2}^{0-2} + \dots + b_{\theta-1} u_{T+1}^1 + b_\theta x_T + b_{\theta+1} x_{T-1} + \dots, \quad (53)$$

согласно которой $u_{T+\theta}$ вычисляются последовательно, если известны x_T, x_{T-1}, \dots , вычисляемые с помощью формулы (51), как если бы ошибки $\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2}$ и т. д. были бы равны нулю.

Итак, величины $x_{T+\theta}^P$ являются решениями уравнения в конечных разностях:

$$u_t = b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_\tau u_{t-\tau} + \dots$$

с «начальными условиями»: $u_T = x_T, u_{T-1} = x_{T-1}$ и т. д. Так как процесс $\{x_t\}$, по предположению, стационарен, решение этого уравнения стремится к нулю при неограниченном возрастании t^1 . После-

¹ Это свойство было уже упомянуто в связи с авторегрессионными процессами, для которых представление (51) включает лишь конечное число членов. Оно пригодно и для более общих случаев.

довательность прогнозированных значений представляет, таким образом, затухающую эволюцию с колебаниями или без них (см. рис. 6).

Аналогично, поскольку процесс является стационарным, последовательность b_τ стремится к нулю при неограниченном возрастании τ , так что отдаленные значения x_t входят с малым весом в вычисления $x_{T+\tau}^P$.

Эти результаты кажутся естественными, если использовать представления x_t как функции от ε_θ (формула (48)). Определение $u_{T+\theta}^\theta$ приводит, действительно, к

$$u_{T+\theta}^\theta = a_0 \varepsilon_T + a_{\theta+1} \varepsilon_{T-1} + a_{\theta+2} \varepsilon_{T-2} + \dots, \quad (54)$$

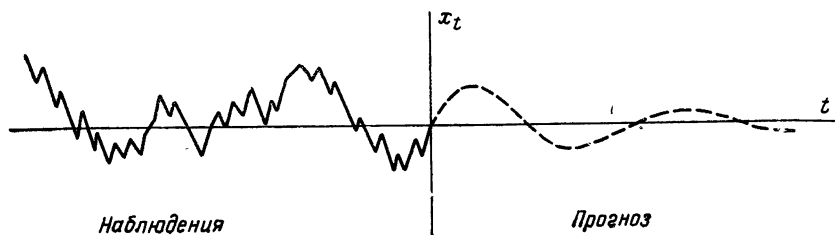


Рис. 6

а определение $\xi_{T+\theta}^\theta$ — к формуле

$$\xi_{T+\theta}^\theta = \varepsilon_{T+\theta} + a_1 \varepsilon_{T+\theta-1} + a_2 \varepsilon_{T+\theta-2} + \dots + a_{\theta-1} \varepsilon_{T+1}. \quad (55)$$

Нетрудно вычислить дисперсию ошибок прогноза для фиксированных значений x_T, x_{T-1} и т. д. Например, дисперсия величины $x_{T+1}^P - x_{T+1}$ равна σ^2 . Аналогично дисперсия $x_{T+2}^P - x_{T+2}$ равна дисперсии ξ_{T+2}^θ , а именно

$$(1 + b_1^2) \sigma^2$$

или, имея в виду (55),

$$(1 + a_1^2) \sigma^2.$$

В общем случае дисперсия $x_{T+\theta}^P - x_{T+\theta}$ равна:

$$\text{Var}(x_{T+\theta}/x_T, x_{T-1}, \dots) = (1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{\theta-1}^2) \sigma^2. \quad (56)$$

Это возрастающая функция от θ , изменяющаяся от σ^2 для $\theta = 1$ до

$$\sigma_x^2 = (1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots) \sigma^2.$$

9. Эргодичность

Если задан стационарный процесс $\{x_t\}$, определим «среднее по времени» для x_t как

$$Mx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i.$$

Априори Mx , как и x_t , является случайной величиной. Однако, если процесс $\{x_t\}$ некоррелирован, закон больших чисел позволяет обна-

ружить тот факт, что Mx сходится в среднем квадратическом к Ex_t . Мы можем тогда рассматривать Mx как детерминированную переменную величину.

Аналогично, если $\{x_t\}$ является процессом со скользящими средними, определяемым соотношением (22), то $Mx = Ex_t = 0$ в среднем квадратическом. В более общем случае можно доказать, что для каждого линейного стационарного процесса второго порядка Mx равно Ex_t . Наблюдение единственной реализации процесса позволяет по крайней мере в принципе вычислить Mx . Если Mx равно Ex_t в среднем квадратическом, то это математическое ожидание можно оценить без асимптотической ошибки с помощью единственной реализации процесса.

Это не всегда так. В § 4 приведен, например, тривиальный процесс, который записывался в виде $x_t = X$ со случайной величиной X . Тогда ясно, что $Mx = X$. Среднее по времени для x_t является случайной величиной, отличной от математического ожидания m .

Те же рассуждения применимы к более сложным функциям от x_t . К примеру, можно пытаться оценить момент порядка α , например $E(x_t^\alpha)$, с помощью его временного среднего значения

$$Mx^\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t^\alpha$$

или момент $E(x_t x_{t-\theta})$ — с помощью его временного среднего значения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\infty} x_t x_{t-\theta}.$$

Асимптотические свойства этих оценок зависят от природы процессов, к которым они применяются.

Имея в виду эти ситуации, говорят, что стационарный процесс является «эргодическим», если его временное среднее значение M_y любой функции $y_t(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+h})$ от $h+1$ последовательных значений x_t сходится в среднем квадратическом к соответствующему математическому ожиданию Ey_t (если, конечно, Ey_t^2 существует).

Нетрудно доказать, что гармонический процесс не является эргодическим. Пусть, например,

$$x_t = a \cos(\omega t + \varphi),$$

где a имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, равным 1, φ имеет равномерное распределение в интервале $(-\pi, \pi)$ и ω не является кратным 2π . Рассмотрим

$$y_t = (x_t - x_{t-1})^2.$$

Легко вычисляем:

$$Ey_t = 2\sin^2(\omega/2) \quad \text{и} \quad My = 2a^2 \sin^2(\omega/2).$$

С другой стороны, можно доказать, что *любой линейный процесс является эргодическим*. Итак, одна единственная реализация линейного процесса позволяет провести вычисления сходящихся оценок для всех характеристик распределения этого процесса.

ГЛАВА 12. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1. Введение

Временным рядом, хронологическим рядом, проще хроникой называют последовательность упорядоченных во времени наблюдений, обозначаемых, например, $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_T$. Эконометрические исследования часто используют временные ряды, синхронная эволюция которых раскрывает некоторые характеристики описываемых ими явлений. Специалист по эконометрии обращается при этом наиболее часто к модели, представляющей явление. Методологическая дискуссия по проблемам, возникающим в связи с использованием временных рядов, должна быть соотнесена с общими моделями, соответствующими реально используемым. Такова точка зрения, выраженная в этой книге.

Подобно тому, как в первой главе были изложены особенности некоторых методов выравнивания, не зависящих от вида модели, здесь будут рассмотрены некоторые методы, которые упрощают анализ временных рядов, оставаясь относительно простыми. Частично настоящая глава относится, скорее, к описательной, чем к индуктивной статистике.

Вторая цель главы состоит в изучении критериев и оценок для модели лишь с одним временным рядом некоторого случайного процесса. Таким образом, ряд рассматривается сам по себе независимо от других рядов, с которыми он может быть связан¹.

Временной анализ экономических явлений уже давно различал разные виды эволюции, которые могут, вообще говоря, комбинироваться: *тенденция* соответствует медленному изменению, происходящему в некотором определенном направлении, которое сохраняется в течение долгих лет;

¹ Принятый в этой главе подход можно обобщить на множество из n временных рядов, причем двумя различными способами. Эти ряды можно рассматривать как реализацию одного случайного процесса, элемент которого x_t будет n -мерным вектором, и этот процесс изучать путем обобщения методов, пригодных для числовых процессов. Во-вторых, можно пользоваться моделью, устанавливающей связи между этими n рядами. В следующих главах мы воспользуемся этим вторым способом.

цикл является быстрым квазипериодическим движением, в котором есть фаза возрастания и фаза убывания. Наиболее часто он связан с флуктуациями экономической активности;

сезонное движение соответствует изменениям, которые происходят регулярно в течение недели, месяца или года. Оно связано с сезонами и ритмом человеческой активности;

случайные флуктуации — беспорядочные движения относительно большой частоты, имеющие более или менее постоянный общий характер. Они порождаются влиянием разнообразных событий на изучаемую величину.

Некоторые статистические ряды представляют те или иные виды этих движений почти в чистом виде. Но большая часть их имеет очень сложный вид. В них могут проявляться, например, как общая тенденция возрастания, так и некоторые сезонные изменения, на которые могут накладываться случайные флуктуации.

Для объяснения описываемого рядом явления и для прогноза будущих значений наблюдаемой величины обычно оказывается плодотворным изолированное рассмотрение каждого из перечисленных движений. Пытаются, например, узнать, будет ли возрастание ускоряться или замедляться. Пробуют измерить сезонное явление для правильного предвидения эволюции, скажем, в течение шести последующих месяцев и т. д.

В этой главе изучаются описательные, или индуктивные, методы, которые применяются или непосредственно к наблюдаемому временному ряду, состоящему из эволюции двух или больше определенных выше типов, или ту или иную составляющую, которая была предварительно извлечена из ряда. § 8 и 9 посвящены методам определения компонент наблюдаемого ряда.

Строго говоря, статистические свойства индуктивных методов, примененные к некоторой определенной компоненте, зависят от метода, выбранного для определения этой компоненты. Следуя принятой концепции, мы позволим себе рассуждать так, как если бы рассматриваемая компонента наблюдалась непосредственно.

2. Главные характеристики ряда

1) *Временной профиль*

Для изучения временного ряда удобно рассматривать график, представляющий эволюцию значений изучаемой величины, нанесенных на ось ординат, как функцию времени по оси абсцисс. Например, рис. 1 в своей верхней части представляет квартальный индекс¹

¹ Этот индекс был вычислен на основе трех месячных индексов после устранения сезонных колебаний: для периода 1956—1967 гг. индекс регулярно публикуется национальным институтом статистики как компонента его общего индекса промышленной продукции; для периода 1951—1956 гг. индексы были предложены Мери и Тимена [217]; для периода 1948—1951 гг. — индексы того времени, к которым были применены сезонные поправки, опубликованные в приложении к «Ежемесячному статистическому бюллетеню» за апрель — июнь 1951 г.

производства французской текстильной промышленности за 20 лет — с 1948 по 1967 г. Наблюдается общий рост со средним приростом порядка 3% в год. На эту тенденцию накладывается конъюнктурное движение, имеющее приближенный циклический характер со спадами или застоями в 1949, 1952, 1955, 1958, 1961—62, 1964—65, 1967 гг. Никакое сезонное движение не проявляется, так как оно было пред-

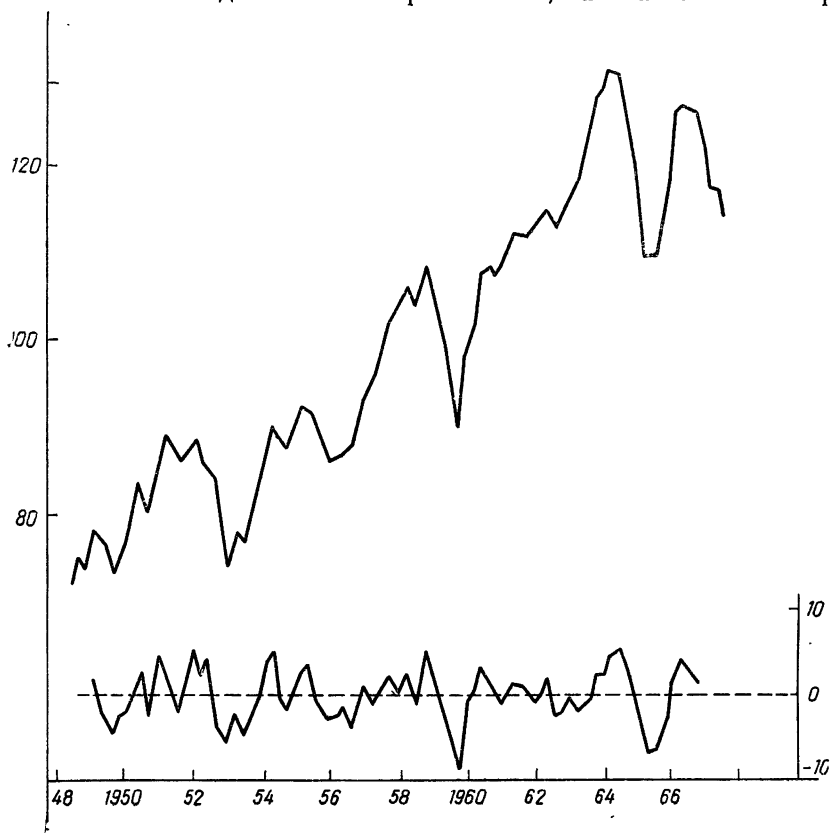


Рис. 1

варительно элиминировано из ряда. Однако можно констатировать существование случайных флуктуаций большего или меньшего размаха.

Изучение этих кратковременных флуктуаций упрощается при устранении из изучаемого ряда не только сезонного движения, но также тенденции и даже большей части медленных конъюнктурных изменений. Часто бывает интересно рассмотреть график эволюции полученного таким образом остаточного ряда. Здесь допустимы различные методы исключения. Мы вернемся к этому вопросу в § 8 и 9.

Так, например, нижний график рис. 1 дает остаточный ряд, полученный после выравнивания изменения индекса текстильной продук-

ции с помощью скользящих средних девяти квартальных данных (см. § 7, формула (39)).

Применение метода скользящих средних приводит к тому, что остаточные изменения для двух крайних лет (1948 и 1967 гг.) не приводятся. Этот ряд, дающий в грубых чертах устойчивое направление движения, обнаруживает некоторую зависимость между последовательными членами, так как его изменения кажутся менее беспорядочными, чем для чисто случайного ряда.

Как мы неоднократно увидим, изучение полученных этим способом остаточных рядов представляет большой интерес с различных точек зрения. Поэтому мы обозначим через x_t ряд, расположенный в нижней части рис. 1, и будем его трактовать так, как если бы он наблюдался непосредственно. В дальнейшем мы вернемся к эффектам предварительной процедуры, примененной к наблюдаемому индексу.

2) Коррелограмма

Для уточнения природы временных зависимостей ряда $\{x_t; t = 1, 2, \dots, T\}$ естественно рассмотреть корреляцию между следующими друг за другом членами, а в более общем случае — между членами, которые разделены одним и тем же периодом. Можно вычислить, таким образом, эмпирические автоковариации:

$$C_\theta = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\theta} (x_t - \bar{x})(x_{t+\theta} - \bar{x}), \quad (1)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \quad (2)$$

и коэффициенты автокорреляции

$$r_\theta = \frac{C_\theta}{C_0}. \quad (3)$$

Ряд r_θ для последовательных значений θ ($\theta = 0, 1, 2, \dots$) называется *коррелограммой* ряда $\{x_t\}$, или «эмпирической коррелограммой», если важно подчеркнуть различие с «теоретической» коррелограммой, определенной для стационарного случайного процесса в § 3 гл. 11.

Распространенным правилом является ограничение эмпирической коррелограммы числом членов до θ , содержащихся между $T/4$ и $T/3$. Причина этого станет понятна после изучения точности оценки теоретической коррелограммы какого-либо процесса с помощью эмпирической коррелограммы некоторой его реализации (см. § 6). Заметим еще, что для расчета автоковариаций часто употребляются формулы, несколько отличные от (1). Так, делитель T иногда заменяется на $T - \theta$; вместо вычисления отклонений от общего среднего значения иногда рассматривают в первой скобке среднее значение $T - \theta$ первых наблюдений и во второй — среднее значение $T - \theta$ последних. Нако-

нец, в некоторых формулах, которые встретятся далее, удобно определить C_θ и r_θ для отрицательных значений по правилу:

$$C_\theta = C_{-\theta}; \quad r_\theta = r_{-\theta}.$$

Рис. 2 представляет собой коррелограмму ряда, соответствующего нижнему графику рис. 1 (индекс $t = 1$ соответствует тогда первому кварталу 1949 г.; индекс $t = 72 = T$ — последнему кварталу 1966 г.). В этом ряде, описывающем колебания уровня текстильного производства около его долгосрочной тенденции, можно констатировать заметную связь между наблюдаемыми значениями для двух последовательных кварталов ($r_1 = 0,43$), существенную обратную связь между

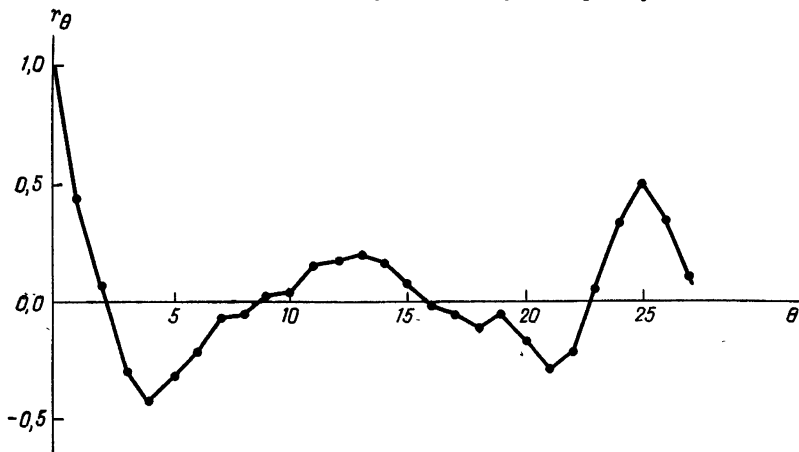


Рис. 2

одинаковыми кварталами соседних лет ($r_4 = -0,41$), отстоящими на пять лет ($r_{21} = -0,30$), и значительную связь между кварталами, разделенными тремя или шестью годами ($r_{13} = 0,19$; $r_{25} = 0,49$). Последняя связь объясняется эффектом конъюнктурного цикла, который проявляется в исходном ряде производства и лишь частично исключается применением скользящей средней. Некоторые статистики попытаются, может быть, приписать обратную корреляцию, характеризующую годичное запаздывание, преувеличенной коррекции сезонных изменений.

3) Определение синусоидальной компоненты

Несмотря на то что данную интерпретацию примера из текстильного производства, коррелограмма является инструментом, плохо приспособленным для отыскания периодических компонент некоторого ряда. Так, трехлетний цикл дает для квартального ряда положительный коэффициент r_{12} , однако он дает также положительный коэффициент r_{24} и отрицательные коэффициенты r_6 и r_{18} . При комбинации циклов с различными частотами каждый коэффициент автокорреляции испытывает одновременное влияние всех циклов.

Естественный метод для выделения периодической компоненты некоторой определенной частоты состоит в отыскании синусоидального ряда y_t , который имеет эту частоту и по возможности приближает наблюдаемый ряд x_t . Очевидно, лишь немногие периодические движения имеют эволюцию чисто синусоидального вида. Однако известно, что любое движение с периодом P можно представить как сумму синусоидальных рядов с периодами $P, P/2, P/3, \dots$, и т. д.; отсюда возникает идея начать с отыскания ряда, который обычно играет наибольшую роль в этом представлении и имеет период P .

Для трехлетнего цикла с квартальными наблюдениями рассматривают:

$$y_t = A \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \varphi \right) \quad (4)$$

или эквивалентно ему:

$$y_t = a \cos \frac{\pi t}{6} + b \sin \frac{\pi t}{6}, \quad (5)$$

где A и φ в первом случае, a и b во втором — подлежащие определению числовые константы. Рассмотрим, например, выражение (5).

В пространстве R^T ряд $\{x_t\}$ представляется вектором x с компонентами x_t . Ряд $\{y_t\}$ вида (5) представляется вектором y , принадлежащим плоскости L , определенной двумя векторами, соответствующими $\left\{ \cos \frac{\pi t}{6} \right\}$ и $\left\{ \sin \frac{\pi t}{6} \right\}$. Наиболее близкий к x вектор y^* плоскости L получается с помощью регрессии x_t на $\cos \frac{\pi t}{6}$ и $\sin \frac{\pi t}{6}$.

Для применения формул гл. 6 вектор z_t нужно определить равенством:

$$z_t = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi t}{6} \\ \sin \frac{\pi t}{6} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что матрица M_{zz} равна $I/2$, когда T является числом, кратным 6. В самом деле, например,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \cos^2 \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \left(\cos \frac{\pi t}{3} + 1 \right),$$

но

$$\sum_{t=6k+1}^{6k+6} \cos \frac{\pi t}{3} = 0$$

для любого целого k ; таким образом,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \cos^2 \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2},$$

когда T является числом, кратным 6. Так как матрица M_{zz}^{-1} равна $2I$, применение формул регрессии дает непосредственно:

$$a^* = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T x_t \cos \frac{\pi t}{6}; \quad b^* = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T x_t \sin \frac{\pi t}{6}. \quad (6)$$

В частном примере с текстильным производством вычисления дают:

$$a^* = 1,68; \quad b^* = 0,34,$$

откуда можно вывести выражения для y_t^* в форме (4), именно

$$y_t^* = 1,72 \cos \left[\frac{\pi}{6} (t - 0,4) \right].$$

В этом выражении компонента, соответствующая трехлетнему циклу, появляется с амплитудой 1,72, равной 62% среднего квадратичного отклонения ряда, и с фазой, показывающей, что максимумы расположены вблизи первых кварталов 1949, 1952, 1955, 1958, 1961, 1964 гг.

Заметим, что среднее значение квадратов выравненной компоненты, равное $m_{xz} M_{zz}^{-1} m_{zx}$ по общим формулам регрессий, принимает здесь простой вид:

$$\frac{a^{*2} + b^{*2}}{2} = \frac{A^{*2}}{2}. \quad (7)$$

Отношение A^{*2} к среднему значению квадратов членов ряда равно удвоенному значению классического коэффициента R^2 , который измеряет часть рассеяния, объясненную выравниванием. В нашем частном примере этот коэффициент достигает значения 0,19.

4) Периодограмма

То, что было сделано для синусоидальной компоненты с периодом, соответствующим 12 наблюдениям, можно повторить для любой синусоидальной компоненты, полупериод которой будет делителем полного числа наблюдений, т. е. для любой компоненты вида:

$$A \cos \left(\frac{n\pi t}{T} + \varphi \right), \quad (8)$$

в которой n является целым числом (период равен $2T/n$).

Предположим, что выравнены две компоненты формулы (8), соответствующие двум различным значениям n , например n_1 и n_2 . Среднее значение квадратов каждой из двух компонент будет соответственно

$$\frac{A_1^{*2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{A_2^{*2}}{2}.$$

Среднее значение квадратов их суммы равно $(A_1^{*2} + A_2^{*2})/2$, если эти две компоненты ортогональны. Можно проверить, что это так, если n_1 и n_2 — два числа, сумма и разность которых не являются кратными $2T$. Рассмотрим, например,

$$2 \sum_{t=1}^T \cos \frac{n_1 \pi t}{T} \cos \frac{n_2 \pi t}{T} = \sum_{t=1}^T \cos \frac{(n_1 + n_2) \pi t}{T} + \sum_{t=1}^T \cos \frac{(n_1 - n_2) \pi t}{T}.$$

В указанных выше предположениях правый член равен нулю. В этом случае последовательности

$$\left\{ \cos \frac{n_1 \pi t}{T} \right\}; \left\{ \sin \frac{n_1 \pi t}{T} \right\}; \left\{ \cos \frac{n_2 \pi t}{T} \right\}; \left\{ \sin \frac{n_2 \pi t}{T} \right\}$$

определяют в пространстве R^T четыре ортогональных вектора. Квадрат длины каждого из этих векторов равен $T/2$.

Более обще, в R^T определяется ортонормированная база с помощью векторов, соответствующих последовательностям:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T} \right\}; \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\} \quad (9)$$

для всех целых значений k , положительных и меньших $\frac{T}{2}$, к которым нужно прибавить постоянную последовательность $\frac{1}{\sqrt{T}}$ и, если T четно, последовательность с чередующимися знаками $(-1)^t/\sqrt{T}$. (Итак, во всех случаях имеется T ортонормированных векторов.)

Для каждого значения k можно вычислить с помощью ряда $\{x_t\}$ компоненту вида:

$$y_{kt} = a_k \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad (10)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{t=1}^T x_t \cos \frac{2\pi kt}{T}; \quad (11)$$

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{t=1}^T x_t \sin \frac{2\pi kt}{T};$$

которые обобщают (6) для k целого, положительного и меньшего $T/2$. Положим еще

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T x_t; \quad b_0 = 0 \quad (12)$$

и, если T четно,

$$a_{T/2} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (-1)^t x_t; \quad b_{T/2} = 0. \quad (13)$$

Снабженное этим новым базисом множество R^T иногда называется *пространством частот* в противоположность *пространству времени*, соответствующему R^T с его естественной базой. В пространстве частот ряд $\{x_t\}$ имеет координатами T величин, определенных с помощью (11), (12) и, возможно, (13).

Величина

$$I_k = a_k^2 + b_k^2 \quad (14)$$

равна квадрату длины проекции x на плоскость, определенную двумя последовательностями (9). Она равна квадрату амплитуды компоненты (10), умноженному на $T/2$. Последовательность значений I_k для $k = 0, 1, 2, \dots, T'$ называется *периодограммой*, где T' обозначает $T/2$, если T четно, и $(T - 1)/2$, если оно нечетно. По построению известно, что

$$\sum_{k=0}^{T'} I_k = \sum_{i=1}^T x_i^2. \quad (15)$$

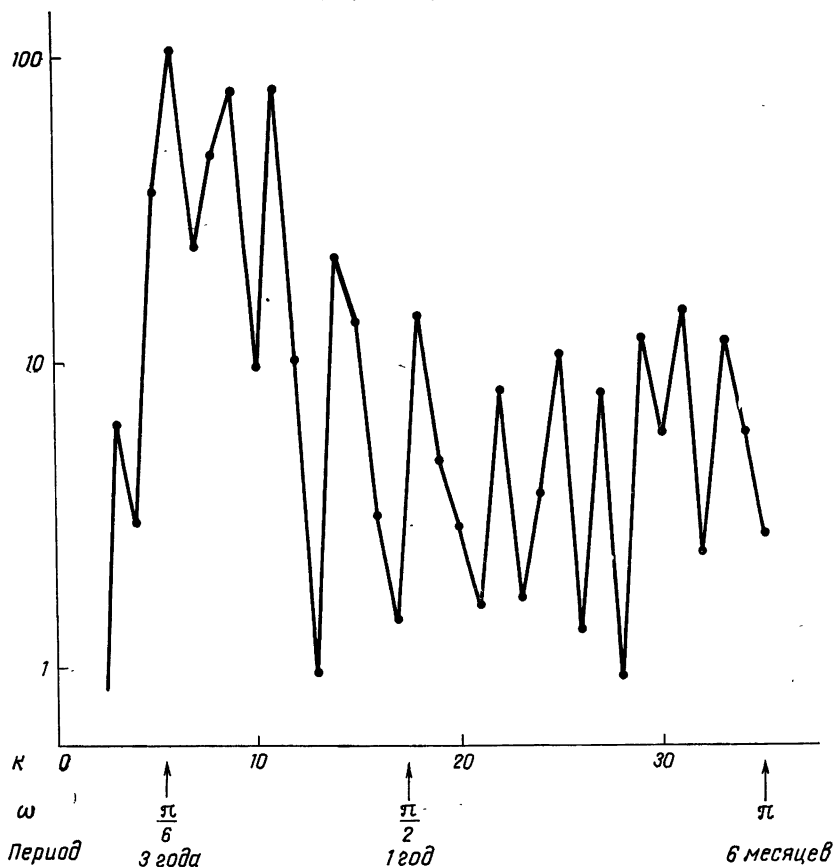


Рис. 3

Таким образом, *периодограмма* определяет для каждого значения k вклад, который вносит в сумму квадратов x_i синусоидальная составляющая с периодом T/k . Периодограмма имеет тенденцию принимать большие значения для периодичностей, играющих в ряде существенную роль.

Рис. 3, построенный в полулогарифмических координатах, дает *периодограмму*¹ ряда, который дан на нижней части графика рис. 1.

¹ При вычислении было опущено наблюдение, соответствующее первому кварталу 1949 г., так что рис. 3 дает *периодограмму* следующих 71 наблюдений.

Можно констатировать иррегулярность этого графика, что характерно не только для этого примера. К данному явлению мы еще вернемся. Значения периодограммы особенно существенны для трехлетних и двадцатимесячных периодов, примерно соответствующих трехлетнему циклу, так как синусоидальная компонента этого периода и соседняя гармоника имеют половинный период. Изменения, по-видимому, не имеют никакого систематического характера.

Временная развертка, коррелограмма и периодограмма дают три возможных представления временного ряда — три представления, которые будут поочередно использоваться для изучения того или иного вопроса. Это сразу становится видно при разборе методов индуктивной статистики.

3. Непараметрические критерии независимости

Одна из важнейших проблем состоит в выявлении тех ситуаций, когда можно отбросить гипотезу о том, что изучаемый ряд реализует некоторый чисто случайный процесс. Имеет ли последовательность наблюдаемых значений систематические закономерности, противоречащие гипотезе независимости?

Метод проверки этой гипотезы предполагает вычисление характеристики порядка следования наблюдаемых значений x_t , а затем в изучении вероятности достижения полученной величины в случае чисто случайного процесса. Так как рассматриваемая характеристика зависит лишь от порядка следования величин x_t или $x_t - x_{t-1}$, а не от их точных значений, то на ее вероятность в случае независимости не влияет точная форма распределения $F(u)$ для x_t . Критерии проверки этого свойства называются «непараметрическими», так как они точны для семейства законов распределения вероятностей, которое зависит лишь от конечного числа неизвестных параметров (это, например, семейство всех непрерывных законов распределения вероятностей x_t).

Употребляемый критерий, т. е. рассматриваемая характеристика порядка, часто изменяется в соответствии с тем, какого рода имеются сомнения относительно независимости процесса. Нужна хорошая эффективность критерия, т. е. чтобы гипотеза независимости при наличии рассматриваемой неправильности отвергалась с высокой вероятностью. Практически чаще всего пытаются проверить существование либо общей тенденции, либо автокорреляции между последовательными значениями. В первом случае $E(x_t)$ является функцией, медленно изменяющейся с t ; во втором — коэффициенты автокорреляции не все равны нулю. Таким образом, нас интересуют два вида критериев.

а) Существует ли тенденция?

Предположим, что x_t имеет непрерывное распределение. Обозначим через S число положительных разностей последовательности $x_t - x_{t-1}$ (для $t = 1, 2, 3, \dots, T$). Это число должно быть систематически значимым, если ряд имеет возрастающую тенденцию, и систематически малым, если ряд имеет убывающую тенденцию. Это число должно,

таким образом, служить базой достаточно эффективного критерия для проверки гипотезы независимости против гипотезы существования монотонной тенденции. Для вычисления уровней значимости нам достаточно знать распределение S в случае, когда $\{x_t\}$ чисто случайно.

Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_T значения, принимаемые x_t , расположенные в порядке возрастания (а не в том, в котором они были получены). Рассмотрим условное распределение S , зная, что значения a_1, a_2, \dots, a_T входят в выборку и x_t независимы между собой. Это распределение получается изучением числа положительных разностей в каждой из $T!$ перестановок чисел a_1, a_2, \dots, a_T , причем каждая перестановка имеет одну и ту же вероятность. Ясно, что это распределение не зависит от точных значений a_1, a_2, \dots, a_T . Можно его установить, беря, например, $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_t = T$ (значения a_t все различны, за исключением выборок с нулевой вероятностью, так как x_t имеет непрерывное распределение). Условное распределение S не зависит от a_1, a_2, \dots, a_T и является безусловным.

Аналогично находят значения $(T - 1)/2$ для средней S и $(T + 1)/2$ для дисперсии. Практически распределение нормально при $T > 12$.

Таким образом, можно проверить независимость элементов наблюдаемого ряда, если вычислить S и установить, значительно ли его отличие от $(T - 1)/2$. Если процесс имеет возрастающую тенденцию, то чаще всего для S получается слишком большое значение. В случае тенденции убывания произойдет обратное. Однако критерий не позволит обнаружить существование осциллирующей тенденции, или, проще, вначале наличие тенденции возрастания, а затем убывания.

Более того, этот критерий мало эффективен для рядов с большими колебаниями. Так, мы находим $S = 47$ для ряда, даваемого верхним графиком рис. 1. Приведенная центрированная переменная, соответствующая теоретическим средним и дисперсии, равна тогда 1,17. Критерий не отвергает гипотезы независимости, хотя на временном профиле тенденция очевидна.

Аналогичный критерий, хотя и с более длительными вычислениями, получается, если величины x_t берутся в порядке возрастающих значений и новый порядок сравнивается с исходным ($t = 1, 2, \dots, T$). Оба порядка будут независимы для чисто случайного $\{x_t\}$. Они коррелируют при наличии тенденции. Таким образом, можно вычислить ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Если θ_t обозначает ранг, присвоенный наблюдению t при новом порядке, тогда коэффициент Спирмена равен:

$$\rho = 1 - \frac{6}{T(T^2 - 1)} \sum_{t=1}^T (\theta_t - t)^2.$$

Для чисто случайных процессов ρ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $1/(T - 1)$. Распределение ρ нормально для больших выборок. Для более ограниченных выборок предпочтительнее вычислить

$$\rho \sqrt{\frac{T-2}{1-\rho^2}}.$$

Эта величина приближенно следует закону Стьюдента с $T - 2$ степенями свободы. М. Кендэл [165] установил и затабулировал точное распределение ρ для значений T , меньших 11.

В случае ряда для текстильного производства вычисления дают $\rho = 0,94$ — величину в высшей степени значимую в сравнении с ее теоретическим среднеквадратическим отклонением, равным 0,113.

б) Существует ли автокорреляция?

При наличии положительной автокорреляции между последовательными значениями x_t можно ожидать, что большие значения будут следовать часто за большими значениями. Это замечание приводит к следующему критерию.

Пусть x_v — медиана наблюдаемой выборки x_t . Рассчитаем число N групп, составленных последовательными наблюдениями, которые все расположены выше или ниже медианы. Например, в ряде, представленном на нижнем графике рис. 1, медиана равна 0,14 и число групп N равно 27.

Ф. Свед и Г. Айзенхарт [288] затабулировали закон распределения N при наличии гипотезы, что процесс является чисто случайным. При $T \geq 50$ можно непосредственно использовать нормальное распределение, беря в качестве N среднюю $(T + 2)/2$ и дисперсию $(T - 1)/4$. В нашем примере найденное значение N значительно отличается от теоретического среднего 37, так как теоретическое среднеквадратическое отклонение равно 4,2.

Аналогичный критерий, называемый критерием Валлиса и Мура, построен с помощью точек возвращения, т. е. значений t , для которых

$$(x_{t+1} - x_t)(x_t - x_{t-1}) < 0.$$

Пусть R — число точек возвращения. М. Кендэл [164] установил для чисто случайного процесса, что среднее R будет равно $\frac{2}{3}(T - 2)$, а его дисперсия равна

$$\frac{16 T - 29}{90}.$$

Нормальное приближение допустимо для $T \geq 50$. Различные уточнения и дополнения по поводу этого критерия дал П. Тионе [295].

На нижнем графике рис. 1 число R точек возвращения равно 40; при уровне значимости 5% оно не отличается значительно от среднего теоретического значения 46,7, так как теоретическое среднеквадратическое отклонение равно 3,5. Этот результат привлекает внимание к тому факту, что критерий Валлиса и Мура менее эффективен, чем критерий Свед и Айзенхарта, для обнаружения периодической компоненты. Кроме двух предыдущих критериев, рассматривают также распределение последовательных наблюдений, больших или меньших медианы, по длинам их групп и распределение групп последовательных возрастающих или убывающих наблюдений. Критерии позволяют сравнить это разбиение с соответствующим теоретическим распределением для чисто случайных процессов. Однако вычисления стано-

вятся более длинными без заметного увеличения мощности критериев.

Примененные к временному профилю ряда эти непараметрические критерии очень просты в употреблении, так как не требуют больших вычислений. Тот факт, что уровни значимости не зависят ни от какой гипотезы относительно истинного закона распределения, чрезвычайно выгоден в работе с экономическими данными. Впрочем, эти критерии имеют меньшую эффективность по сравнению с другими критериями, обычно основанными на гипотезе нормальности x_t ¹.

4. Критерии независимости для моментов второго порядка

Проверим гипотезу, согласно которой процесс $\{x_t\}$ будет чисто случайным, и примем, что он распределен по нормальному закону (одному и тому же независимо от значения t).

В самом деле, если процесс автокоррелирован, некоторые из его коэффициентов ρ_θ отличны от нуля. Таким образом, кажется естественным ввести критерий для оценки коэффициентов коррелограммы ρ_θ .

Если m — среднее значение процесса $\{x_t\}$, то ρ_θ равно по определению:

$$\rho_\theta = \frac{E[(x_t - m)(x_{t+\theta} - m)]}{E(x_t - m)^2}. \quad (16)$$

Критерий устанавливается для «эмпирического коэффициента автокорреляции» r_θ , который, будучи определен формулами (1)–(3), образует вполне естественную оценку ρ_θ . Однако для применения критерия нужно знать закон распределения r_θ в предположении, что $\{x_t\}$ — нормальный и чисто случайный процесс. Точное распределение этих коэффициентов очень сложно. Его удастся определить лишь в частных случаях. Обычные критерии устанавливаются с помощью оценок, несколько отличающихся от ρ_θ .

Разница возникает потому, что из-за первых и последних членов ряда r_θ не является симметрической функцией T наблюдаемых значений x_1, x_2, \dots, x_T . Поэтому вместо r_θ используют коэффициент, который как раз представляет собой симметрическую функцию этих значений. Наиболее естественно выбрать «круговой коэффициент автокорреляции»

$$r_\theta^* = \frac{\sum_{t=1}^T x_t x_{t+\theta} - \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T x_t \right]^2}{\sum_{t=1}^T x_t^2 - \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T x_t \right]^2}, \quad (17)$$

¹ Более полное изложение непараметрических критериев см., например, в [220, гл. 16] и [223].

для которого принимается следующее соотношение:

$$x_{T+1} = x_1, \dots, x_{T+\theta} = x_\theta. \quad (18)$$

Таким образом,

$$\sum_{t=1}^T x_t x_{t+\theta} = x_1 x_{1+\theta} + x_2 x_{2+\theta} + \dots + x_{T-\theta} x_T + x_{T-\theta+1} x_1 + \dots + x_T x_\theta.$$

Так как формула (17) симметрична, существует ортогональное линейное преобразование T -мерного вектора x вида $u = G_\theta x$:

$$r_\theta^* = \frac{\sum_t \lambda_{\theta t} u_t^2}{\sum_t u_t^2},$$

где u_t — независимые переменные (если только таковыми являются x_t) и $\lambda_{\theta t}$ — числовые коэффициенты. Это преобразование позволило Р. Андерсону [8] найти точное распределение величин r_θ^* . При неограниченном возрастании числа наблюдений это распределение стремится к нормальному закону, определяемому независимо от любой гипотезы нормальности относительно x_t .

Например, имеем:

$$E(r_1^*) = \frac{-1}{T-1}; \quad \text{Var}(r_1^*) = \frac{T-2}{(T-1)^2}.$$

Это позволяет отметить, между прочим, что оценка r_1^* через r_1^* содержит систематическую ошибку. При 72 наблюдениях имеем $E(r_1^*) = -0,014$ и $\text{Var}(r_1^*) = 0,0139$, так что коэффициент $r_1^* = 0,43$, найденный с помощью последовательности, изображенной на нижнем графике рис. 1, приводит к отклонению гипотезы независимости.

Закон распределения группы из нескольких r_θ^* также известен¹, но он редко используется на практике, а критерии обычно применяются к одному единственному коэффициенту, чаще всего r_1^* .

В самом деле, обычные критерии основываются на почти аналогичной переменной — «отношении фон Неймана»², распределение которой весьма полно табулировано в [141]. Определение этого отношения вытекает из следующего наблюдения. Если процесс $\{x_t\}$ является чисто случайным, величина

$$\delta^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (x_{t+1} - x_t)^2$$

образует оценку без систематической ошибки для $2\sigma^2$. Пусть s^2 — обычная оценка σ^2 :

$$s^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2, \quad \text{где } \bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t.$$

¹ См., например, следующие три работы: [315], [57], [159].

² См. [235].

Для чисто случайного процесса отношение δ^2/s^2 должно быть близко к 2 и меньше 2, если между x_t существует положительная автокорреляция.

Если временной ряд продолжителен, начальные и конечные члены имеют небольшое относительное значение и δ^2/s^2 мало отличаются от 2 ($1 - r_1$). Качество критерия относительно δ^2/s^2 будет, таким образом, почти тем же, что и для критериев для r_1 или r_1^* .

Какова мощность рассмотренных выше критериев? Интуиция подсказывает, что они должны позволять эффективно испытывать независимость по отношению к гипотезе прямой временной связи. В самом деле, как мы увидим в гл. 14, r_1 очень близко к оценке максимального правдоподобия для ρ_1 , если $\{x_t\}$ — авторегрессионный процесс вида:

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где $\{\varepsilon_t\}$ — нормальный чисто случайный процесс. В этом случае критерий отношения правдоподобия приводит к критерию для r_1 . Окончательно r_1 или отношение фон Неймана δ^2/s^2 оказываются особенно эффективными, если изучаемый процесс мало отличается от линейной цепи Маркова первого порядка. Подобным же образом представляются многочисленные процессы со случайными возмущениями.

5. Критерии независимости для периодограммы

Во многих эконометрических работах рассуждения построены так, как если бы возможная зависимость ошибок имела форму авторегрессионного процесса вида (18). Это позволяет сохранить критерий независимости, основанный на r_1 или на отношении фон Неймана (см. также критерий Дарбина — Уотсона, гл. 13, § 2). Наблюдения показывают, однако, что процессы со случайными возмущениями редко имеют такую простую форму, особенно для относительно длинных статистических рядов.

Характер изменения временных рядов выявляет иногда более или менее заметную периодичность. Как мы видели раньше, периодичность влияет на все множество членов коррелограммы, отражаясь лишь на малом числе членов периодограммы: только на тех, которые соответствуют периодам, близким к рассматриваемому периоду, и иногда его гармоникам. Естественно, возникает идея использовать периодограмму для критериев независимости, которые должны быть достаточно мощными в отношении альтернативных гипотез.

Первый критерий относится к сравнению *максимума периодограммы* и ее среднего уровня для множества всех частот ($k = 0, 1, 2, \dots, T'$). Отношение между этими двумя величинами должно быть большим для ряда, у которого есть доминирующая периодичность. Обозначим через \hat{I} максимум I_k , через s^2 — величину

$$s^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T'} I_k \quad (19)$$

и рассмотрим отношение \hat{I}/s^2 (в наиболее часто встречающемся случае, когда x_t являются отклонениями относительно общего среднего значения и $I_0 = 0$, делитель T предпочтительнее заменить на $T - 1$).

Если ряд $\{x_t\}$ есть реализация нормального стационарного чисто случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, то T координат a_k и b_k в пространстве частот являются T нормальными независимыми случайными величинами с одинаковой дисперсией σ^2 и нулевым математическим ожиданием. Величины I_k/σ^2 распределены тогда по закону χ^2 с двумя степенями свободы (одной степенью свободы для $k = 0$ и иногда $k = \frac{T}{2}$) и независимы.

При этих предположениях распределение \hat{I}/s^2 было получено Р. А. Фишером [99] и табулировано Г. Т. Дэвисом ([64] табл. 2, с. 601—605). При уровне значимости 5% граница для \hat{I}/s^2 устанавливается следующими значениями:

9,34	для $T = 21$;
11,09	» $T = 41$;
12,06	» $T = 61$;
12,76	» $T = 81$;
13,27	» $T = 101$.

В частном случае ряда, имеющего периодограмму рис. 3, значения \hat{I} и s^2 равны соответственно 104,4 и 7,65. Их отношение равно 13,6. Оно значимо при 5%-ном уровне для временной зависимости, так как для $T = 72$ граница равна примерно 12,5.

Только что изложенный *критерий Фишера* может не выявить связь, которая проявляется для широкой полосы частот, так как тогда спектральная плотность процесса будет относительно большой, но почти постоянной для существенной области частот.

Второй критерий, который кажется наилучшим для обнаружения таких зависимостей, основан на рассмотрении *кумулятивной периодограммы*. В случае, когда x_t являются отклонениями от среднего значения, она записывается в виде:

$$S_k = \frac{\sum_{h=1}^k I_h}{\sum_{h=1}^{T''} I_h}, \quad k = 1, 2, \dots, T'', \quad (20)$$

где T'' равно $T/2 - 1$, если T четно, и $(T - 1)/2$, если T нечетно. Эту кумулятивную периодограмму можно представить графиком, где значению k соответствует точка с абсциссой k/T'' (см. рис. 4, относящийся к ряду, который уже рассматривался на рис. 2 и 3). Визуальное изучение кумулятивной периодограммы может быть столь же полезно, как и рассмотрение самой периодограммы. Если преобладают компоненты с длинной периодичностью, то кумулятивная периодограмма явно проходит над диагональю квадрата, в котором она изображена.

Если ряд $\{x_t\}$ является реализацией нормального, стационарного и чисто случайного процесса и число T наблюдений неограниченно возрастает, кумулятивная периодограмма стремится к совпадению с диагональю первого координатного угла. В самом деле, соответствующая абсциссе u ордината равна умноженному на u отношению

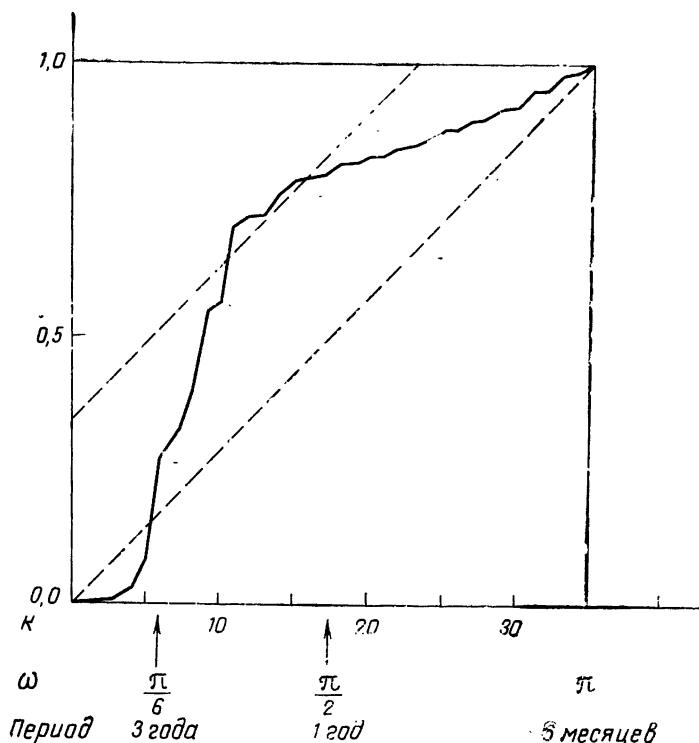


Рис. 4

между двумя средними значениями независимых переменных с двумя степенями свободы: среднему значению uT'' переменных — в числителе, среднему значению T'' переменных — в знаменателе.

При проверке независимости существенных компонент против противоположной гипотезы для малых частот рассматривают, например,

$$C^+ = \text{Max}_k \left(S_k - \frac{k}{T''} \right). \quad (21)$$

Если хотят избежать избытка компонент со слабой периодичностью, рассматривают

$$C^- = \text{Max}_k \left(\frac{k}{T''} - S_k \right). \quad (22)$$

Наконец, если не могут отклонить ни одну из этих двух возможностей, то рассматривают

$$C = \text{Max}_k \left| S_k - \frac{k}{T''} \right| = \text{Max} (C^+, C^-). \quad (23)$$

Дж. Дарбин [84] представил таблицу доверительных границ этих переменных в предположении, что $\{x_t\}$ является нормальным и чисто случайным процессом. Приведем границы C^+ при уровне значимости 5% для некоторых значений T'' :

0,313 для $T'' = 10$,	0,268 для $T'' = 15$;
0,238 » $T'' = 20$,	0,216 » $T'' = 25$;
0,200 » $T'' = 30$,	0,187 » $T'' = 35$;
0,176 » $T'' = 40$,	0,167 » $T'' = 45$;
0,159 » $T'' = 50$,	0,146 » $T'' = 60$.

Те же значения определяют границы для C^- при уровне 5% и для C при уровне 10%.

Уровень значимости может быть изображен на графике кумулятивной периодограммы. Он соответствует одной или двум прямым, параллельным биссектрисе первого координатного угла и расположенным на расстоянии, равном уровню значимости. Критерий приводит к отклонению гипотезы независимости, если кумулятивная периодограмма пересекает эту прямую (или одну из этих двух прямых). Такой случай изображен на рис. 4. В этом примере критерий, построенный с помощью кумулятивной периодограммы, кажется более мощным, чем критерий, который относится к максимуму периодограммы.

6. Оценка коррелограммы

Перейдем к анализу статистических методов, которые используются при допущении, что наблюдаемый ряд является реализацией некоторого стационарного случайного процесса. Для обсуждения вероятностных свойств этих методов мы предположим еще, что процесс линейен. Это не предполагает больших ограничений в эконометрических приложениях¹. Эмпирическая коррелограмма и периодограмма временного ряда будут служить для оценки соответственно теоретической коррелограммы процесса и спектральной плоскости.

Так как имеется линейный, а значит, и эргодический процесс, то известно, что при неограниченном возрастании числа наблюдений T эмпирические автоковариации C_θ , определенные формулой (1), стремятся по вероятности к теоретическим автоковариациям (определенным по формуле (4) гл. 11). Коэффициенты r_θ являются, таким образом, сходящимися оценками коэффициентов автокорреляции ρ_θ (см. формулы (3) и (16) настоящей главы).

¹ Сезонные составляющие со строго фиксированной периодичностью нельзя, однако, рассматривать как результат линейного стационарного процесса. Мы не будем пока уделять этому внимания.

М. Бартлет [21] установил формулу для предела при неограниченно возрастающем T произведения T на ковариацию r_θ и $r_{\theta+\tau}$. Именно:

$$T \operatorname{cov}(r_\theta, r_{\theta+\tau}) \sim \sum_{t=-\infty}^{\infty} \{\rho_t \rho_{t+\tau} + \rho_{t+\theta+\tau} \rho_{t-\theta} - 2\rho_{\theta+\tau} \rho_t \rho_{t-\theta} - 2\rho_\theta \rho_t \rho_{t-\theta-\tau} + 2\rho_\theta \rho_{\theta+\tau} \rho_t^2\}. \quad (24)$$

Эта формула, применяемая в предположении конечности моментов 4-го порядка, показывает, что асимптотическая ковариация r_θ и $r_{\theta+\tau}$ является довольно сложной функцией теоретической коррелограммы.

Заметим еще, что для больших значений θ три последних члена правой части (24) малы, так как в них входят в качестве множителей конечных сумм коэффициенты ρ_θ или $\rho_{\theta+\tau}$, которые сами малы (так как процесс линейен, ρ_θ стремится к нулю вместе с θ). То же происходит и со вторым членом, который является суммой произведений элементов, расположенных в коррелограмме на расстоянии $2\theta + \tau$. В то же время первый член не зависит от θ . Он не будет мал, если только τ будет велико.

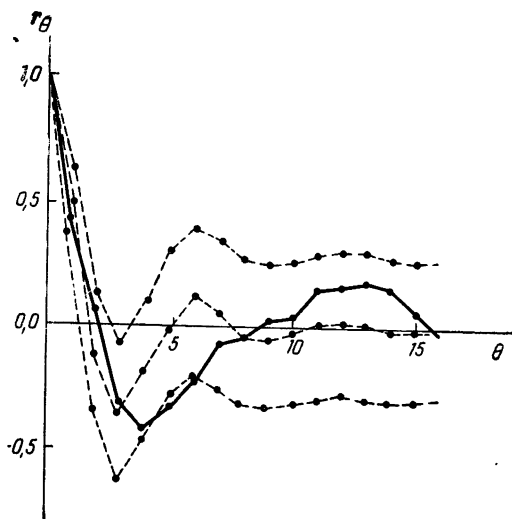


Рис. 5

Итак, дисперсия r_θ включает член $(\sum \rho_t^2)$, который не зависит от θ и становится преобладающим при возрастании θ . Абсолютная точность, с которой r_θ оценивает ρ_θ , почти постоянна для больших значений θ . Так как ρ_θ стремится к нулю, относительная точность становится недостаточной при возрастающих значениях θ .

Этим объясняется практическое правило, рекомендуемое, чтобы эмпирическая коррелограмма ограничивалась числом членов, равным четверти или самое большее трети числа наблюдений (на рис. 2 и 5 коррелограмма, однако, продолжена до r_{27} для выявления максимума при r_{25}).

В качестве примера на рис. 5 приводится, кроме уже представленной на рис. 2 эмпирической коррелограммы, теоретическая коррелограмма некоторого произвольно выбранного авторегрессионного процесса:

$$x_t = \frac{3}{4} x_{t-1} - \frac{1}{2} x_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (25)$$

где ε_t образуют чисто случайную последовательность. С обеих сторон этой коррелограммы на расстоянии, равном удвоенному среднему квадратическому отклонению, вычисленному с помощью формулы (24), проведены две кривые. Хотя кажется, что коррелограмма $\{r_\theta\}$ очень существенно отличается от коррелограммы процесса (25), однако можно констатировать, что лишь r_5 , r_6 и r_{25} , r_{26} выходят за пределы проведенной таким образом полосы.

Обычно сравнительно регулярный ход изменения эмпирических коррелограмм может ввести в заблуждение относительно их точности. Он объясняется корреляцией между последовательными значениями r_θ . Так, применение формулы (24) к процессу (25) привело бы к коэффициентам корреляции 0,7 между r_1 и r_2 и 0,6 между r_4 и r_5 .

Доверительные интервалы или приближенные критерии для ρ_θ можно сконструировать с помощью формулы (24), так как обычно закон распределения r_θ можно считать приближенно нормальным. По этому вопросу можно обратиться к Э. Хэннану [137], где обсуждается асимптотическая нормальность $\sqrt{T} (r_\theta - \rho_\theta)$.

7. Оценка спектра стационарного процесса

1) Периодограмма и спектр

Для оценки спектра процесса $\{x_t\}$ рассмотрим периодограмму, определенную формулами (11) и (14). Примем, что наблюдаемый ряд величин x_t имеет нулевое математическое ожидание или, если это не так, что периодограмма вычислена для ряда отклонений от эмпирического среднего. Подставляя выражения для a_k^2 и b_k^2 , мы можем записать:

$$I_k = a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{T} \sum_{t, t'=1}^T x_t x_{t'} \cos \frac{2\pi k}{T} (t' - t). \quad (26)$$

Положив тогда $t' - t = \theta$, получаем:

$$I_k = \frac{2}{T} \sum_{\theta=-T}^T \sum_t x_t x_{t+\theta} \cos \frac{2\pi k \theta}{T}, \quad (27)$$

причем пределы суммирования второй суммы равны 1 и $T - \theta$, если θ не отрицательно, $-\theta + 1$ и T , если оно отрицательно. Величину I_k можно, таким образом, записать в виде:

$$I_k = 2 \sum_{\theta=-T}^T C_\theta \cos \frac{2\pi k \theta}{T}, \quad (28)$$

где C_θ — автоковариации, определенные формулой (1). Равенство (28) не применимо ни к I_0 , равному нулю по предположению, ни, когда T четно, к $I_{T/2}$, для которого коэффициент 2 перед знаком суммирования должен быть отброшен.

Заметим, что это выражение для I_k не особенно удобно для вычисления, так как оно содержит все автоковариации. Тем не менее влияние

членов, соответствующих большим значениям θ , должно быть слабым. Таким образом, формулу (28) можно использовать для приближенных вычислений, где значение θ ограничено сравнительно небольшим интервалом вокруг нуля (например, от $-T/4$ до $T/4$). Так исключаются вычисления a_k и b_k по формуле (11), что уменьшает работу по определению I_k . Это преимущество (некогда очень важное) потеряло интерес в эпоху ЭВМ, особенно в эконометрии, где изучаемые ряды остаются пока сравнительно короткими.

В первом приближении¹ математические ожидания величин C_θ равны теоретическим ковариациям $\gamma_\theta = \sigma^2 \rho_\theta$. Так, для достаточно больших значений T математическое ожидание I_k очень близко к выражению:

$$2 \sum_{\theta=-\infty}^{\infty} \gamma_\theta \cos \frac{2\pi k \theta}{T}, \quad (29)$$

которое в точности равно умноженной на 4π спектральной плотности $f(\omega)$ для значения $2\pi k/T$ величины ω (см. формулу (8) гл. 11). Периодограмма дает, таким образом, асимптотически несмещенную оценку $4\pi f(\omega)$.

Однако речь здесь не идет о сходящейся оценке, так как дисперсия не стремится к нулю, когда число наблюдений неограниченно возрастает при k/T , остающемся постоянным. Точнее, положим $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ и напомним $I_T(\omega)$ вместо I_k . Можно доказать, что, если процесс линеен и его моменты 4-го порядка конечны, ковариация между $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$ стремится к нулю вместе с T , когда $\omega_1 \neq \omega_2$, в то время как дисперсия $I_T(\omega)$ стремится к $16\pi^2 f^2(\omega)$.

Коэффициент изменения $I_T(\omega)$ стремится, таким образом, к 1 при неограниченном возрастании T (эта формула, неприменимая для $\omega = 0$ или $\omega = \pm \pi$, доказана, например, в книге Э. Хэннана [137 гл. 3]). В качестве первого приближения часто принимают, что $I_T(\omega)/[2\pi f(\omega)]$ распределено по закону χ^2 с двумя степенями свободы. Это предположение можно обосновать, принимая, что распределения составляющих a_k и b_k , определенных уравнением (11), асимптотически нормальны. До изучения того, каким образом периодограмма может послужить для оценки спектральной плотности, заметим, что если ω_1 и ω_2 — два числа, заключенные между 0 и π , и такие, что $\omega_1 < \omega_2$, то оценка для $[F(\omega_2) - F(\omega_1)]$ будет сходящейся, если вычислить:

$$\frac{1}{2T} \sum_k I_k. \quad (30)$$

¹ Как мы увидим в гл. 13, формула (22), отклонение между $\frac{T}{T-\theta} E(C_\theta)$ и γ_θ для нелинейных процессов примерно равно $-\frac{1}{T} \sum_{\tau=-T}^T \rho_\tau$. Эта величина стремится к нулю, когда T неограниченно возрастает.

Здесь сумма берется для значений k , заключенных между

$$\frac{T\omega_1}{2\pi} \text{ и } \frac{T\omega_2}{2\pi}.$$

В самом деле, выражение (30) можно записать в виде:

$$\sum_k \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{I_k}{4\pi}.$$

Но $2\pi/T$ есть разность между значениями ω , соответствующими двум целым последовательным значениям k , а $I_k/4\pi$ имеет математическое ожидание, равное значению $f(\omega)$ спектральной плотности для угла ω , соответствующего k . Когда T неограниченно возрастает, математическое ожидание для (30) стремится, таким образом, к

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega = F(\omega_2) - F(\omega_1). \quad (31)$$

С другой стороны, сумма выражения (30) содержит примерно

$$\frac{T}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1)$$

членов с конечными дисперсиями и ковариациями порядка T^{-1} .

Выражение (30) имеет, таким образом, дисперсию, уменьшающуюся к нулю, так что эта сумма стремится в среднем квадратическом к (31). В частности, определенная формулой (20) кумулятивная периодограмма является сходящейся оценкой

$$\frac{1}{\sigma^2} F(\omega) \text{ для } \omega = \frac{2\pi k}{T}.$$

(Равенство $F(\omega) = -F(-\omega)$ дополняет оценку для отрицательных значений ω .)

Для некоторых приложений кумулятивная периодограмма достаточна. В других ситуациях необходимо определить интервалы с наиболее быстрым возрастанием $F(\omega)$, которые можно было бы идентифицировать особенно хорошо, если бы было известно представление кривой плотности $f(\omega)$. Наконец, для ответа на некоторые вопросы нужно знать значения спектральной плотности в достаточно точно определенных точках¹. Те или иные из этих соображений объясняют, почему обычно отыскивается оценка именно $f(\omega)$.

2) Скользящая средняя периодограммы

При меньшей дисперсии периодограмма давала бы хорошую оценку с точностью до множителя 4π . Однако последовательные члены периодограммы весьма слабо коррелированы. Поэтому возникает идея «сгладить» периодограмму, т. е. вычислить скользящую среднюю некоторого числа последовательных членов.

¹ См., например, гл. 13, § 7.

Рассмотрим, в частности, оценку $f^*(\omega)$, определенную выражением:

$$4\pi f^* \left(\frac{2\pi k}{T} \right) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m I_{k+h}. \quad (32)$$

Это выражение содержит заранее фиксированное значение числа m . Если бы $f(\omega)$ была постоянной в интервале

$$\left[\frac{2\pi}{T} (k-m), \frac{2\pi}{T} (k+m) \right],$$

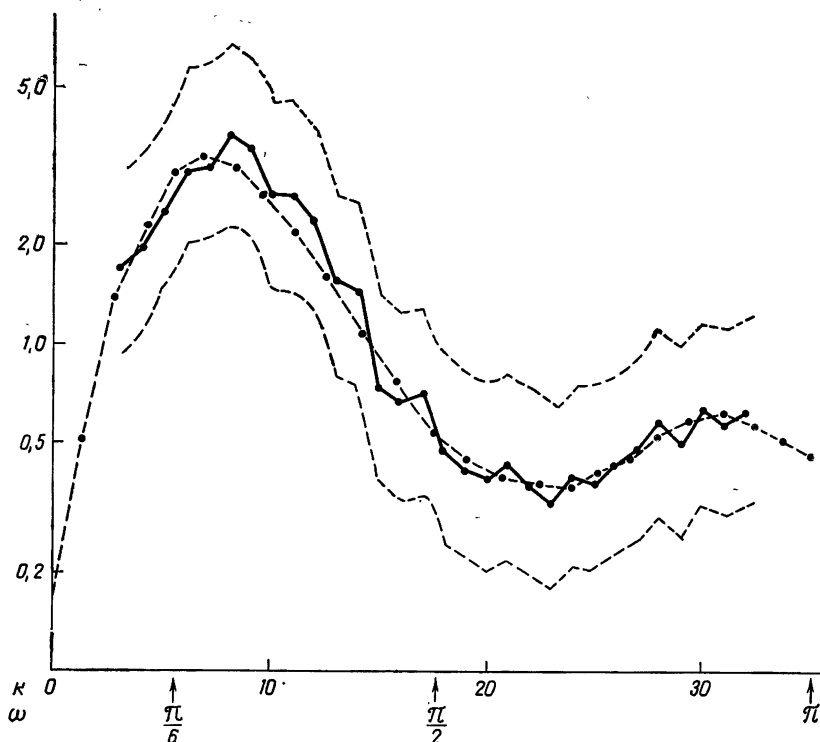


Рис. 6

оценка $f^*(\omega)$ имела бы математическое ожидание $f(\omega)$ и коэффициент вариации, близкий к $(2m+1)^{-1/2}$.

В качестве примера сплошная линия на рис. 6 изображает значения $f^*(\omega)$ после применения формулы (32) к периодограмме рис. 3, причем значение m принимается равным 3. Сравнение рис. 3 и 6 позволяет хорошо выявить тот факт, что сглаживание облегчает понимание периодограммы. Становится весьма явной значимость периодичности продолжительностью от 18 месяцев до 3 лет, в то время как спектральная плотность, по-видимому, мало изменяется для периодов порядка года и менее. При интерпретации сглаженного

спектра, очевидно, не следует придавать особого смысла регулярности изменений $f^*(\omega)$, так как последняя является прямым результатом сглаживания. Например, при применении формулы (32) и при $m = 3$ существует искусственная корреляция между величинами, полученными для k и k' при $k - k' \leq 7$. Для спектральной плотности суждение о вероятности может сравнивать лишь величины, соответствующие достаточно различающимся углам ω .

Итак, попробуем составить представление о характере значимости вариации, изображенной на рис. 6. Между $k = 6$ и $k = 9$ оценка $f^*(\omega)$ остается больше трех; выше $k = 17$ она остается меньше 0,6. Что отражает отклонение от этих двух величин при достигнутой точности?

Для ответа на этот вопрос можно применить нижеследующие весьма приближенные рассуждения. Распределение $\frac{(4m+2)f^*(\omega)}{f(\omega)}$ близко к распределению χ^2 с $4m+2$ степенями свободы (исследуемая величина близка к сумме $2m+1$ почти независимых переменных, распределенных по законам, близким к χ^2 с двумя степенями свободы). Если бы спектральная плотность $f(\omega)$ имела одно и то же значение в таких двух точках ω_1 и ω_2 , что

$$|\omega_2 - \omega_1| \geq \frac{2\pi}{T} (2m+1),$$

то отношение $f^*(\omega_1)/f^*(\omega_2)$ следовало бы приближенно закону Фишера — Снедекора со степенями свободы $(4m+2)$ и $(4m+2)$.

В интересующем нас случае $4m+2 = 14$. При 10%-ном уровне значимости уровень a , для которого соответствующая переменная Фишера содержится в интервале $(1/a, a)$, будет равен примерно 2,5. При уровне значимости 2% он возрастает лишь до 3,7, т. е. остается в любом случае меньшим наблюдаемого значения 5.

Тот же тип рассуждений показывает, что на графике с полулогарифмическими координатами вокруг оцениваемой спектральной плотности можно построить полосу, представляющую доверительные интервалы, которые соответствуют данному уровню значимости, например 5%. Достаточно обратиться к закону χ^2 , чтобы построить доверительный интервал формы

$$\left[\frac{1}{a} f^*(\omega), a f^*(\omega) \right].$$

Итак,

$$\dots \frac{1}{14} \chi^2_{14}$$

превосходит $a = 1,87$ с вероятностью 2,5%. Таким образом, на рис. 6 доверительная полоса для 5% была построена путем рассмотрения интервалов $[0,53f^*(\omega); 1,87f^*(\omega)]$. При этом можно констатировать, что точность остается посредственной.

Для достижения большей точности можно было бы использовать большую величину m , например $m = 8$, в этом случае коэффициент вариации был бы равен 1/4. Однако при имеющемся количестве данных

нам пришлось бы прекратить поиски оценки спектральной *плотности*, потому что полоса $2m + 1$ последовательных значений k перекрыла бы примерно половину интервала $[0, \pi]$. Вычисленное среднее значение для столь широкой полосы едва ли могло бы рассматриваться как оценка спектральной плотности.

В самом деле, при любой оценке спектральной плотности возникает дилемма, которая имеет особую остроту в эконометрии с ее сравнительно короткими статистическими рядами. *Высокая точность требует, чтобы сглаживание производилось для полосы (называемой также «окном»), содержащей большое число членов периодограммы. Однако вычисление скользящей средней вводит обычно смещение, которое тем существеннее, чем шире полоса.* Так, в случае формулы (32) математическое ожидание $f^*(2\pi k/T)$ приближенно равно среднему значению величин $f(2\pi h/T)$ для $(2m + 1)$ чисел h , окружающих k . Если $2\pi k/T$ соответствует максимуму $f(\omega)$, математическое ожидание $f^*(2\pi k/T)$ будет меньше $f(\omega)$. Последняя разность будет возрастать с увеличением m (во всяком случае, если с обеих сторон на расстоянии $\frac{2\pi k}{T}$ для всей ширины рассматриваемых полос $f(\omega)$ будет монотонной).

3) Оценка спектра с помощью коррелограммы

Формула (32), без сомнения, хорошо отвечает потребностям эконометрии, так как она проста. Однако чаще употребляются другие формулы скользящей средней. Эта практика связана не столько со стремлением проводить сглаживание, по возможности сохраняющее предполагаемый вид функции $f(\omega)$, сколько желанием достичь простоты в вычислениях. Это обусловило появление *процедур, которые позволяют произвести прямое определение оценок $f(\omega)$ без перехода к периодограмме*, а лишь с использованием *первых членов коррелограммы*.

Пусть дана конечная последовательность чисел λ_θ (для $\theta = -n, -n + 1, \dots, n - 1, n$), такая, что $\lambda_\theta = \lambda_{-\theta}$. Рассмотрим функцию

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{\theta=-n}^n \lambda_\theta C_\theta e^{-i\omega\theta} = \sum_{\theta=-n}^n \lambda_\theta C_\theta \cos \omega\theta, \quad (33)$$

в которой величины C_θ являются n первыми автоковариациями $C_0 r_\theta$. Мы покажем, что $4\pi \hat{f}(\omega)$ можно рассматривать как результат сглаживания периодограммы.

Точнее говоря, заменим в формуле (28) угол $2\pi k/T$ на ω и I_k на $I_T(\omega)$. Запишем:

$$I_T(\omega) = 2 \sum_{\theta=-T}^T C_\theta \cos \omega\theta = 2 \sum_{\theta=-T}^T C_\theta e^{-i\omega\theta}, \quad (34)$$

причем это равенство применимо для любого значения ω на действительной прямой. Определим функцию

$$\omega(\psi) = \sum_{\tau=-n}^n \lambda_\tau e^{i\tau\psi} = \sum_{\tau=-n}^n \lambda_\tau \cos \tau\psi. \quad (35)$$

Покажем, что

$$4\pi\hat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\psi) I_T(\omega + \psi) d\psi. \quad (36)$$

Член справа является разнородностью скользящей средней периодограммы (читатель может проверить, что интеграл от $\omega(\psi)$ на интервале $[-\pi, \pi]$ равен $2\pi\lambda_0$, так что $\hat{f}(\omega)$ будет стремиться к несмещенной оценке $f(\omega)$, если $2\pi\lambda_0 = 1$).

Проверим равенство (36). Подставляя туда значения $I_T(\omega)$ и $\omega(\psi)$, определяемые формулами (34) и (35), получаем:

$$4\pi\hat{f}(\omega) = 2 \sum_{\theta=-T}^T \sum_{\tau=-n}^n C_{\theta} \lambda_{\tau} e^{-i\omega\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi(\tau-\theta)} d\psi.$$

Но интеграл равен нулю при $\tau \neq \theta$ и равен 2π при $\tau = \theta$. Итак, мы получаем в точности формулу (33), которая имеет то преимущество, что она содержит лишь $n + 1$ первых автоковариаций. Но она становится действительно интересной, если выбор λ_{θ} дает очень малые значения функции $\omega(\psi)$ для ψ , сильно отличающихся от нуля. Поэтому находят такие значения λ_{θ} , которые дают функцию $\omega(\psi)$, хорошо удовлетворяющую этому условию: $\omega(\psi)$ является относительно большой в окрестности нуля и величиной, которой можно пренебречь, на остальной части отрезка $[-\pi, \pi]$; формула (36) тогда означает, что $4\pi\hat{f}(\omega)$ получается с помощью периодограммы, как если бы рассматривалась ее репрезентативная кривая через «окно», направленное на абсциссу ω . Были предложены различные формулы для определения приемлемых «окон» (см. [137, гл. 3]). Здесь мы будем придерживаться широко распространенного способа, дающего так называемое *окно Тьюки*, или *окно Хеннинга*:

$$\lambda_{\theta} = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{n} \right), \quad (37)$$

где n — выбранное заранее фиксированное число. Функция $\omega(\psi)$ представляет тогда большую волну, имеющую вид синусоиды в интервале

$$\left(-\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \right)$$

и принимающую малые значения вне этого интервала, причем вторичные гармоники будут иметь амплитуду не более одного процента амплитуды главной волны. Для численных выкладок будет применяться формула (33), записанная в форме:

$$2\pi f(\omega) = C_0 + \sum_{\theta=1}^n C_{\theta} \cos \omega\theta \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{n} \right). \quad (38)$$

(Часто вместо C_{θ} употребляют также $C_0 r_{\theta}$.)

На практике выбор ширины полосы, т. е. ширины окна, важнее выбора формулы для определения окна. Эта ширина обратно про-

порциональна числу n . Здесь можно повторить соображения, высказанные ранее по поводу выбора m для применения формулы (32). Большое значение n приводит к узкой полосе и к такому сглаживанию, что дисперсия $\hat{f}(\omega)$ будет большой. (Э. Хэннан [137] показал, в частности, что при окне (37) коэффициент изменения $\hat{f}(\omega)$ будет примерно равен $(3n/4T)^{1/2}$.) Малое значение n дает лучшее сглаживание и более удовлетворительную дисперсию, но в результате приводит к заметному смещению в оценке $f(\omega)$. Построением оценок вида $\hat{f}(\omega)$ регулярные изменения представляют в виде функции от ω . На практике, однако, не надо заблуждаться в отношении их кажущейся точности.

В действительности оценки $f^*(\omega)$ и $\hat{f}(\omega)$ приводят, вообще говоря, к очень близким результатам, если принятые размеры полос сравнимы¹. Например, на рис. 6 пунктирная кривая была получена из формулы (38) при $n = 12$ (с использованием при ее вычислении лишь первых двенадцати точек коррелограммы рис. 2). Она очень близка к сплошной кривой. Основная доля $\omega(\psi)$ покрывает тогда полосу от

$$-\frac{\pi}{6} \text{ до } \frac{\pi}{6},$$

причем ее большие значения расположены в полосе приблизительно от

$$-\frac{\pi}{12} \text{ до } \frac{\pi}{12}.$$

Это соответствует шести последовательным точкам периодограммы при $\omega = 2\pi k/T$. Сплошная кривая является простой скользящей средней для семи последовательных членов. Формула Хэннана приводит к коэффициенту вариации $1/\sqrt{8}$ для $\hat{f}(\omega)$, в то время как мы имели $1/\sqrt{7}$ для $f^*(\omega)$. (Вообще, коэффициенты вариации будут одинаковыми, если ширина полосы определяется величиной m в (32) и величиной n в (38) так, что $n(m + 1/2) = 2T/3$.)

4) Предварительная фильтрация

Иногда, оценивая спектр ряда $\{x_t\}$, предварительно производят «фильтрацию», т. е. применяют выше описанные методы не к самому $\{x_t\}$, а к ряду $\{y_t\}$, который получается из $\{x_t\}$ после преобразования с помощью линейного фильтра (см. гл. 11, § 5). Очевидно, это преобразование приводит к изменению спектра, но это изменение известно. В самом деле, если $f_x(\omega)$ и $f_y(\omega)$ — спектральные плотности двух процессов, то $f_y(\omega) = G(\omega) f_x(\omega)$, где функция $G(\omega)$ будет «усиление» фильтра. Тогда мы действуем в два этапа: 1) определяем оценку

¹ Впрочем, формула (32) соответствует оценке из класса, определенного формулой (33), по крайней мере при безграничном возрастании « n ». Именно поэтому иногда говорят об окне Даниеля, характеризуя сглаживание с помощью скользящей средней непосредственно по периодограмме согласно формуле (32).

$f_y^*(\omega)$ спектра $\{y_t\}$ с помощью одного из ранее описанных методов; 2) вычисляем оценку спектра для $\{x_t\}$: $f_x^*(\omega) = f_y^*(\omega)/G(\omega)$.

Эта предварительная фильтрация преследует две цели, которые необходимо четко различать: с одной стороны, это исключение общей тенденции ряда $\{x_t\}$ так, чтобы ряд $\{y_t\}$ лучше удовлетворял гипотезе стационарности; с другой стороны, — уменьшение размаха колебаний спектра так, чтобы можно было рассматривать спектр $\{y_t\}$ как более близкий к константе, чем спектр $\{x_t\}$.

Возрастающее использование методов спектрального анализа в прикладной эконометрии привело к тому, что все чаще пытаются определять спектры эконометрических рядов, которые представляют тенденции или медленные изменения. По-видимому, такие колебания могут быть ассоциированы с изменениями стационарного процесса, спектральная плотность которого будет большой для малых частот. Однако, с одной стороны, нельзя оценивать рассматриваемую плотность с помощью ряда, который своими частотами не покрывает даже одного цикла. С другой стороны, для хорошей оценки спектра с большими частотами предварительно исключают замедленные изменения, учитывая, что они содержат гармоники с большими частотами (см. § 10).

Так, переход от квартального ряда динамики текстильного производства (верхняя кривая рис. 1) к остаточному ряду (нижний график этого же рисунка) был проведен с помощью часто используемого линейного фильтра, который дает остатки относительно взвешенной средней для $2\theta + 1$ последовательных членов:

$$y_t = x_t - \frac{1}{2\theta + 2} \sum_{\tau=-\theta}^{\theta} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{\theta + 1} \right) \cdot x_{t+\tau}. \quad (39)$$

(Здесь формула применяется для $\theta = 4$; фильтруемый ряд обозначается y_t в противоположность тому, что делалось в приложениях, описанных раньше в этой главе.)

Усиление фильтра тогда равно:

$$G(\omega) = \left[\frac{\theta}{\theta + 1} - \frac{1}{\theta + 1} \sum_{\tau=1}^{\theta} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{\theta + 1} \right) \cdot \cos \omega\tau \right]^2. \quad (40)$$

В интересующем нас случае ($\theta = 4$) длительная тенденция полностью исключена. Амплитуда частоты $\frac{\pi}{12}$ (цикл в 6 лет) уменьшена на девять десятых, амплитуда трехлетнего цикла уменьшена на 60%; амплитуды частот, больших чем $\frac{\pi}{3}$, изменены мало.

В действительности исключение длинных изменений можно произвести методами, отличающимися от предварительной фильтрации. Можно, например, провести выравнивание ряда применением полинома малой степени и оценить спектр с помощью остатков относительно этого полинома (такая оценка не будет, конечно, иметь смысла для

очень низких частот). Преимущество этого метода, к которому мы вернемся в § 10, состоит в получении трансформированного ряда со столькими же членами, что и первоначальный ряд, тогда как применение линейного фильтра ведет к уменьшению числа членов (θ на каждом конце ряда при применении формулы (39)). Для средних или больших частот преобразованный ряд не имеет в точности того же спектра, что и первоначальный ряд; но для не слишком малого числа наблюдений этим источником ошибок можно пренебречь по сравнению с неточностью оценки спектра.

Предварительная фильтрация может оказаться приемлемой даже для рядов, не представляющих длительных тенденций, она может оказаться полезной и для уменьшения смещений, возникающих при сглаживании периодограммы. Эти смещения тем более существенны, чем больше изменяется спектральная плоскость. Их можно избежать, если иметь дело с рядом, спектр которого почти постоянен. С этой точки зрения фильтрация должна производиться так, чтобы спектральная плотность преобразованного ряда изменялась не сильно.

Это замечание особенно важно, когда спектр исходных экономических рядов сильно меняется, иногда от 1 до 1000 в области рассматриваемых частот; с другой стороны, при чаще всего употребляемых методах вычисления для каждой частоты сглаживание учитывает все значения периодограммы. Использование окон приводит, несомненно, к существенному уменьшению влияния частот, удаленных от изучаемых. Но такое влияние в какой-то степени все же присутствует из-за наличия вторичных гармоник ω (ψ) (говорят, что имеются «утечки» на краях окна).

Например, для первоначального ряда динамики текстильного производства фильтрация по формуле (39) имеет целью не только исключение тенденции роста, но также существенное уменьшение амплитуды циклов с периодом 2 года и более. Иначе, результаты, полученные для меньших периодичностей с помощью окна Тьюки, оказываются заметно смещенными вверх.

В этом примере можно даже считать, что оцененный для преобразованного ряда спектр изменяется слишком сильно в области частот, для которых число наблюдений допускает известную точность (см. рис. 6). Изменения происходят в области от 1 до 10, но они совершаются быстро в окрестности максимума, так что для низких частот смещение может быть существенным.

Поэтому желательно производить более глубокую фильтрацию. Не обязательно выводить подробную формулу, так как точность оцениваемого спектра останется небольшой. Мы удовлетворимся применением к ряду, показанному на нижней части рис. 1 (ряд снова обозначается через $\{x_t\}$), часто используемого преобразования вида:

$$y_t = x_t - ax_{t-1}, \quad (41)$$

где a имеет значение 0,8. По формуле (31) гл. 11 усиление фильтра равно:

$$G(\omega) = 1 - 2a \cos \omega + a^2. \quad (42)$$

Таким образом, фильтр уменьшает больше чем в три раза амплитуду шестилетнего цикла ($\omega = \frac{\pi}{12}$) и на тридцать процентов амплитуду двухлетнего цикла, усиливая компоненты с низкими частотами (несколько более чем наполовину для девятимесячного цикла).

Некоторые результаты, полученные подобным образом для спектральной плотности, изображены на рис. 7. Пунктирная кривая дает оценку $\hat{f}_y(\omega)$, получающуюся применением к фильтрованному ряду

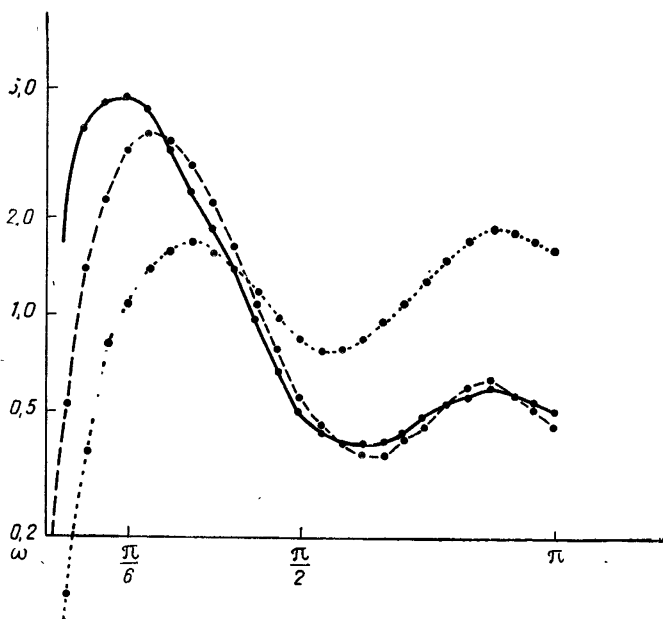


Рис. 7

$\{y_t\}$ окна Тьюки (с $n = 12$). Сплошная кривая показывает соответствующую оценку $\hat{f}_y(\omega)/G(\omega)$ спектра $\{x_t\}$. Наконец, штриховая кривая изображает оценку $\hat{f}_x(\omega)$, полученную ранее с помощью того же окна для $\{x_t\}$.

Для спектральной плотности $\{x_t\}$ результаты практически идентичны в частотах, соответствующих циклам с периодичностью ниже или равной двум годам (минимум менее выражен, так как при низких частотах $\hat{f}_y(\omega)$ изменяется немного больше, чем $\hat{f}_x(\omega)$; однако отклонение пренебрежимо мало по сравнению с коэффициентом вариации оценки). Зато разница заметна для максимума, который теперь находится точно в области трехлетней периодичности ($\omega = \frac{\pi}{6}$, а не $5\pi/24$) и увеличивается примерно на 25%. Можно считать эту новую оценку существенно менее смещенной, чем предыдущая, так как кривизна $\hat{f}_y(\omega)$ гораздо менее заметна, чем кривизна $\hat{f}_x(\omega)$ в области, содержащей $(\pi/24, \pi/3)$.

Необходимость сглаживания спектра объясняет также, почему предпочитают обычно рассматривать ряды, скорректированные на сезонные изменения, а не исходные ряды (за исключением, очевидно, случаев, когда интересуются определением именно сезонного движения). Присутствие максимума спектра для годового цикла и его гармоник часто влияет существенным образом на оценку спектральной плотности для других периодичностей.

8. Параметрическое разложение временного ряда

До сих пор мы рассматривали применение индуктивных процедур к стационарным процессам. Перейдем к изучению нестационарных временных рядов того типа, который встречается в экономике.

Как мы видели в начале этой главы, принято различать несколько составляющих в большей части временных экономических рядов: главную тенденцию, цикл, сезонные движения и случайные изменения, эффекты которых могут комбинироваться различными способами. Иногда необходимо выделить каждую из этих компонент для лучшего анализа явления и лучшего прогноза его эволюции.

Существуют две категории методов для разложения временных рядов. Первая категория использует общую теорию множественных регрессий и линейного выравнивания, вторая основана главным образом на применении более или менее сложных линейных фильтров. Здесь мы ограничимся лишь краткими указаниями относительно методов первой категории, так как им посвящена вторая часть этой книги.

Предположим, что рассматриваемый ряд x_t содержит три компоненты: тенденцию, сезонное движение и случайные изменения. Обозначим их u_t , v_t и ε_t . Предположим, что u_t и v_t выражаются посредством малого числа неизвестных параметров. Например, можно принять, что тенденция выражается с помощью полинома малой степени от t , и считать, что сезонное движение устойчиво и зависит лишь от $S - 1$ параметров, где S — число наблюдений за «год» (см. ниже). Примем еще, что процесс ε_t чисто случайный, имеющий нулевое математическое ожидание и конечную дисперсию. Предположим, наконец, что принимается линейная схема:

$$x_t = u_t + s_t + \varepsilon_t. \quad (43)$$

Итак, выполняются все обычные условия для обоснованного применения метода наименьших квадратов.

Более точно:

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p; \quad (44)$$

$$s_t = c_1 \delta_{1t} + c_2 \delta_{2t} + \dots + c_S \delta_{St}, \quad (45)$$

где a_j и c_h — неизвестные параметры, δ_{ht} — вспомогательные переменные, причем δ_{ht} равно 1, когда наблюдение t относится к «месяцу» h , и равно 0 в других случаях. По причине, уже изучавшейся в гл. 7,

§ 8, c_h нельзя определить без дополнительного условия. Вот почему обычно принимается равенство:

$$\sum_{h=1}^S c_h = 0. \quad (46)$$

Метод наименьших квадратов при ограничении (46) дает оценки $p + S + 1$ неизвестных коэффициентов $a_0, \dots, a_p, c_1, \dots, c_S$ и приводит, таким образом, к определению двух составляющих (44) и (45).

Такая формализация проблемы была известна уже давно, но лишь недавно Д. Юргенсон [161] представил ее в систематической форме. В таком виде она приводит к вычислениям, которые до распространения ЭВМ играли важную роль и для упрощения которых были разработаны различные методы, как, например, метод ортогональных полиномов и таблиц Бюи-Балло¹. В настоящее время они практически утратили свою ценность.

До вычисления параметров или даже после получения первого приближения оценок практики имеют привычку отбрасывать аномальные наблюдения. Последние возникают то ли по известным причинам (например, забастовка), то ли просто потому, что они слишком отклоняются от направления эволюции ряда. В гл. 8, § 5 (1) было отмечено, что эту практику можно очень хорошо обосновать, несмотря на ее произвольный характер.

Модель (43) и ее оценка с помощью метода наименьших квадратов основываются на некоторых гипотезах. Однако встречающиеся здесь методы можно, очевидно, применять во многих вариантах. Для каждого из них принимается особый класс гипотез о природе каждой составляющей, относительно случайных элементов и формирования ряда из его компонент.

Так, в представлении (45) сезонного движения можно зарезервировать возможность, когда составляющая, относящаяся к одному данному «месяцу», с течением времени возрастает или убывает. Тогда коэффициент c_h заменяют на $c_h + d_h t$, а сумма d_h должна быть равна нулю. Разложение ряда потребует оценки $S - 1$ дополнительных параметров. Такая процедура применима лишь к длинным временным рядам.

Сохраняя модель (43), можно предположить, что случайные колебания в ней сильно автокоррелированы. Например, можно рассматривать процесс вида:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t,$$

где коэффициент ρ близок к 1, а η_t — члены без автокорреляции. Тогда предпочтительно применить метод наименьших квадратов к зависимости, выраженный через первые разности $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$, а не через непосредственно наблюдаемые величины. В самом деле, можно записать:

$$\Delta x_t = \Delta u_t + \Delta s_t + \Delta \varepsilon_t$$

¹ См., например, гл. 12, § 3 а) и б).

и автокорреляция является, по предположению, гораздо более слабой между $\Delta \varepsilon_t$, чем между ε_t . Если u_t есть полином степени μ по t , то Δu_t будет полиномом степени $\mu - 1$. Если u_t периодическая функция с периодом u , то Δu_t также будет таковой. Если u_t — синусоидальная функция, то и Δu_t также будет таковой. Рассмотренные в этом параграфе методы применяются, таким образом, с малыми изменениями ¹.

Часто аддитивной схеме (43) можно предпочесть мультипликативную схему:

$$x_t = u_t s_t \exp(\varepsilon_t).$$

Последнее выражение можно записать в виде:

$$\log x_t = \log u_t + \log s_t + \varepsilon_t. \quad (47)$$

Экспоненциальная общая тенденция u_t будет соответствовать линейному возрастанию $\log u_t$; периодическая эволюция s_t имеет эволюцию такой же природы для $\log s_t$. Определение тенденции и сезонной составляющей может производиться с помощью регрессии для логарифмов величин x_t , как было показано выше.

Если величины ε_t модели (47) сильно коррелированы, можно произвести декомпозицию с помощью первых разностей $\log x_t - \log x_{t-1}$, т. е. с помощью логарифмов отношений x_t/x_{t-1} .

Итак, существуют многочисленные методы для определения тенденции и сезонного движения временного ряда. Цель этой главы не состоит в том, чтобы изучить в деталях эти методы. Здесь важно лишь указать их общий логический характер. Ясно, что выбор применяемого в каждом частном случае метода, зависит от справедливости гипотез, которые можно принять относительно природы основной тенденции, сезонного движения и случайных колебаний ².

Однако все изученные до сих пор схемы подчинены одному и тому же неудобному ограничению: они не содержат никакого члена, представляющего «цикл». Все эти схемы применимы лишь для явлений, которые — если абстрагироваться от сезонных или случайных колебаний — представляют собой регулярное развитие, выражающееся простой аналитической функцией с малым числом параметров. Однако многие экономические ряды испытывают влияние важных факторов, связанных, например, с общим состоянием конъюнктуры. Эти факторы содержат различные колебания, откуда и происходит данное им название «циклов». С нашей точки зрения, этот термин не адекватен, поскольку он наводит на мысль о регулярности, которой на самом деле нет.

Основная трудность при вычислении сезонных составляющих временных (динамических) рядов промышленного производства, внешней торговли и многих других экономических рядов заключена в выборе таких методов, которые испытывали бы слабое влияние от нерегу-

¹ Г. Морла [225] нашел одновременно сезонную составляющую и автокорреляцию остатков. Для этого он использовал метод, который будет рассмотрен в гл. 13, § 7.

² Подробности см. [224, гл. 6].

лярных колебаний конъюнктуры¹. Вот почему обычно обращаются к методам фильтрации. Их мы теперь и изучим.

Мы не будем повторять по их поводу то, что только что говорилось о различных вариантах, касающихся формулировки модели декомпозиции. Переложение этих результатов очевидно.

9. Линейные фильтры для разложения временного ряда

Вернемся к схеме (43). Однако не будем уточнять форму тенденции u_t , так как речь идет о движении, для которого предполагается лишь наличие постоянной эволюции. Вначале мы обратим внимание на определение или на исключение тенденции. Запишем процесс в виде:

$$x_t = u_t + \varepsilon_t. \quad (48)$$

Для определения регулярного движения, следующего той же общей эволюции, что и x_t , но на которое мало влияют случайности, естественно заменить x_t взвешенным средним наблюдаемых значений в интервале $[t - \theta, t + \theta]$, содержащем t . Тогда u_t оценивается равенством:

$$u_t^* = \sum_{\tau=-\theta}^{\theta} a_{\tau} x_{t+\tau}, \quad (49)$$

где коэффициенты a_{τ} в сумме равны 1. Вычисления повторяются для каждого значения t . Так получается *скользящая средняя* ряда $\{x_t\}$. Эта операция вполне соответствует линейному фильтру (см. гл. 11, § 5). Выбор формулы для скользящей средней сводится к выбору длины интервала (а значит, и числа θ) и коэффициентов a_{τ} . Интуитивно можно понять, что θ должно быть тем большим, чем большую степень регулярности предполагают о тенденции. Аналогично можно предположить, что коэффициенты a_{τ} должны быть большими вблизи центра интервала $[t - \theta, t + \theta]$, чем у его краев.

Для уточнения выбора a_{τ} можно исходить из многих принципов. Далее будут разобраны три из них.

1) Локальное выравнивание полинома для определения тенденции

Первый метод использует формулу (49). Она эквивалентна той, к которой приводит выравнивание полинома степени $p - 1$ для $2\theta + 1$ членов ряда $\{x_{t+\tau}\}$ на интервале $[t - \theta, t + \theta]$, причем выравнивание проводится подлежащим уточнению методом. Число p выби-

¹ Здесь не говорится о систематических возмущениях, связанных с некоторыми явлениями, как, например, даты праздников. Необходимые в этих случаях исправления очень просто учесть либо априори, либо через вспомогательные переменные, вводимые в модели в соответствии с ранее указанными методами (гл. 8, § 2).

рается априори. Оно должно быть, конечно, заметно меньше $2\theta + 1$. Оно выражает также некоторые априорные идеи относительно формы тенденции.

Предположим, например, что этот метод применяется для $p = 3$ и $\theta = 2$. Значение u_t^* будет определяться формулой

$$u_t^* = a_{-2}x_{t-2} + a_{-1}x_{t-1} + a_0x_t + a_1x_{t+1} + a_2x_{t+2}, \quad (50)$$

где числовые коэффициенты a_{-2} , a_{-1} , a_0 , a_1 и a_2 будут такими, что $u_t^* = x_t$, если x_t является полиномом степени 2 по t . Запишем, например,

$$x_{t+\tau} = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2;$$

должно быть $u_t^* = x_t = \alpha_0$ для любых α_0 , α_1 и α_2 . Определение коэффициентов α_0 , α_1 и α_2 с помощью (50) приводит непосредственно к трем условиям:

$$\left. \begin{aligned} a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 &= 1, \\ -2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2 &= 0, \\ 4a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 4a_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Два из пяти коэффициентов можно, таким образом, выбрать произвольно. Существует еще один произвольный коэффициент, если исходить из симметрической формулы, в которой $a_{-1} = a_1$ и $a_{-2} = a_2$, так как второе условие из (51) удовлетворяется тогда автоматически.

Для двух данных значений p и θ степень произвольности формулы можно усилить, если зафиксировать правила выравнивания. Так, М. Кендэл [164] изучил скользящие средние, полученные при выравнивании полинома с помощью множественной регрессии по методу наименьших квадратов. Из всех формул, соответствующих одним и тем же значениям p и θ , эти скользящие средние позволяют произвести наиболее точную оценку u_t , если тенденция выражается полиномом степени p по t и если процесс $\{e_t\}$ является чисто случайным. При отсутствии ясных противоположных указаний эти способы могут оказаться наиболее интересными¹.

Итак, при $p = 3$ и $\theta = 2$ выравнивание полинома

$$\alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2$$

по пяти наблюдениям $x_{t+\tau}$ (где $-2 \leq \tau \leq 2$) предполагает определение оценок α_0^* , α_1^* и α_2^* (эти оценки будут различными для различных значений t). Регрессия по методу наименьших квадратов приводит

¹ Этот принцип применял Р. Дюваль [86] для оценки тенденции ряда, представляющего сезонную компоненту. Скользящие средние вычисляются тогда для периода, превосходящего период сезонного явления; их веса устанавливаются, как и выше, но соответствуют выравниванию ряда по сумме полинома и сезонной составляющей.

к следующим нормальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\tau} x_{t+\tau} &= \alpha_0^* (2\theta + 1) + \alpha_1^* \sum_{\tau} \tau + \alpha_2^* \sum_{\tau} \tau^2 = 5\alpha_0^* + 10\alpha_2^*, \\ \sum_{\tau} \tau x_{t+\tau} &= \alpha_0^* \sum_{\tau} \tau + \alpha_1^* \sum_{\tau} \tau^2 + \alpha_2^* \sum_{\tau} \tau^3 = 10\alpha_1^*, \\ \sum_{\tau} \tau^2 x_{t+\tau} &= \alpha_0^* \sum_{\tau} \tau^2 + \alpha_1^* \sum_{\tau} \tau^3 + \alpha_2^* \sum_{\tau} \tau^4 = 10\alpha_0^* + 34\alpha_2^*, \end{aligned} \right\}$$

из которых следует:

$$35\alpha_0^* = 17 \sum_{\tau} x_{t+\tau} - 5 \sum_{\tau} \tau^2 x_{t+\tau}.$$

Формула для вычисления $u_t^* = \alpha_0^*$ тогда примет вид:

$$u_t^* = -\frac{3}{35} x_{t-2} + \frac{12}{35} x_{t-1} + \frac{17}{35} x_t + \frac{12}{35} x_{t+1} - \frac{3}{35} x_{t+2}, \quad (52)$$

коэффициенты которой удовлетворяют системе (51).

Этот метод приводит к громоздким формулам для вычисления скользящих средних, если θ является достаточно большим числом, так как значения коэффициентов a_{τ} в этом случае принимают довольно сложный вид.

На практике уже давно используются более простые формулы, которые читатель может найти в работе [164, гл. 29].

2) Локальное выравнивание гармонической функции

Сходный метод состоит в употреблении формулы, полученной выравниванием гармонической функции вида:

$$u_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p [\beta_j \cos \varphi_j \tau + \gamma_j \sin \varphi_j \tau], \quad (53)$$

где число p и углы φ_j выбраны априори, а коэффициенты α_0 , β_j и γ_j определяются в результате выравнивания. Так как речь идет о представлении тенденции, некоторые из углов φ_j должны быть относительно малыми по сравнению с частотой, соответствующей длине интервала, т. е. сравнительно с $\pi/(\theta + 1)$.

Интересно сравнить с этим методом формулу (39), используемую в § 7 как инструмент предварительной фильтрации для определения спектра динамического ряда текстильного производства. Рассмотрим локальное выравнивание тенденции вида:

$$u_{t+\tau} = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \beta \cos \frac{\pi \tau}{\theta + 1} + \gamma \sin \frac{\pi \tau}{\theta + 1}. \quad (54)$$

Это смешанная формула из линейного члена и синусоидальной составляющей, имеющей в качестве периода длину интервала выравнивания.

Применяя множественную регрессию для определения α_0 , α_1 , β и γ , можно записать два из нормальных уравнений: те, которые соответствуют приравниванию нулю производных по α_0 и β суммы квадратов отклонений между $x_{t+\tau}$ и $u_{t+\tau}$, а именно

$$\begin{cases} \sum_{\tau=-\theta}^{\theta} x_{t+\tau} - (2\theta + 1) \alpha_0^* - \beta^* = 0, \\ \sum_{\tau=-\theta}^{\theta} x_{t+\tau} \cos \frac{\pi\tau}{\theta+1} - \alpha_0^* - \theta\beta^* = 0 \end{cases}$$

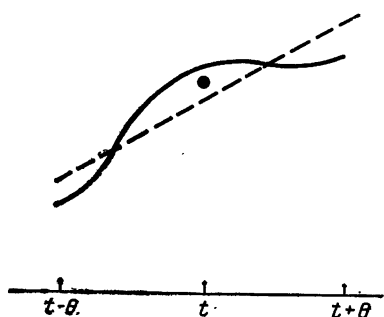


Рис. 8

(коэффициенты α_1^* и γ^* в рассматриваемых уравнениях равны нулю). Суммируя эти уравнения, получаем:

$$\alpha_0^* + \frac{\beta^*}{2} = \frac{1}{2\theta + 2} \times \sum_{\tau=-\theta}^{\theta} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{\theta+1} \right) x_{t+\tau}.$$

Эта величина совпадает с той, которую формула (39) дает для тенденции. Для $\tau = 0$ уравнение (54) приводит к $u_t^* = \alpha_0^* + \beta^*$. Итак, согласно формуле (39), исключаящей тенденцию, синусоидальная составляющая уравнения (54) будет соответствовать наполовину тенденции и наполовину случайным движениям. (На рис. 8 кривая представляет результат множественной регрессии для (54); точка — значение тенденции u_t , полученное с помощью формулы (39).)

3) Исключение тенденции с помощью последовательных разностей

Кратко остановимся на *разностном методе*, полное изложение которого дано в работе Г. Тинтнера [298].

Пусть разность $x_t - x_{t-1}$ обозначена через Δx_t ; $\Delta^p x_t$ — разность порядка p , равная по определению

$$\Delta^{p-1} x_t - \Delta^{p-1} x_{t-1},$$

где $\Delta^1 x_t = \Delta x_t$. Вычисление разностей порядка p случайного процесса $\{x_t\}$ определяет другой случайный процесс $\{\Delta^p x_t\}$. Оператор Δ^p образует линейный фильтр.

Если случайный процесс $\{x_t\}$ является суммой тенденции $\{u_t\}$ и стационарного процесса $\{e_t\}$, то процесс $\{\Delta^p x_t\}$ представляет собой, очевидно, сумму последовательности $\{\Delta^p u_t\}$ и стационарного процесса $\{\Delta^p e_t\}$. Если эволюция тенденции u_t регулярна, то Δu_t будет, вообще говоря, мало, а $\Delta^2 u_t$ еще меньше. Напротив, разности Δe_t и $\Delta^2 e_t$ принимают, как правило, значения того же порядка, что и e_t . Составляющая тенденции будет, таким образом, менее существенной в процессах $\{\Delta x_t\}$ и $\{\Delta^2 x_t\}$, чем в процессе $\{x_t\}$. Отсюда возникает идея:

процесс $\{\Delta^p x_t\}$ рассматривать вместо $\{x_t\}$ для исключения составляющей тенденции.

Эта замена порождает две проблемы. В какой мере составляющая тенденции устраняется в $\{\Delta^p x_t\}$? Устранение будет полным тогда и только тогда, когда u_t является полиномом по t степени не выше $p - 1$. Однако, вообще говоря, $\Delta^p u_t$ не будет равно нулю. Второй вопрос: даже если составляющая тенденции полностью исчезает, как по наблюдениям $\{\Delta^p e_t\}$ узнать о свойствах $\{e_t\}$? Для ответа на этот вопрос следует изучить соответствие, которое оператор Δ^p устанавливает между характеристиками $\{e_t\}$ и $\{\Delta^p e_t\}$.

Существует достаточно тесная зависимость между методом скользящих средних и методом разностей. М. Кендэл [166] показал, что вычисления скользящих средних сводятся к применению разностей для некоторой линейной комбинации нескольких последовательных членов x_t . Точнее, каждой формуле скользящих средних (выражающейся выравниванием для $2\theta + 1$ последовательных членов некоторого полинома степени $p - 1$) соответствуют $2\theta - p + 1$ членов β_τ (для $p - \theta \leq \tau < \theta$), таких, что

$$u_t^* = x_t - \Delta^p \left[\sum_{\tau=p-\theta}^{\theta} \beta_\tau x_{t+\tau} \right]. \quad (55)$$

Этот результат легко проверить для случая $p = 3$, $\theta = 2$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta^3 [\beta_1 x_{t+1} + \beta_2 x_{t+2}] &= \beta_2 x_{t+2} + (\beta_1 - 3\beta_2) x_{t+1} + (3\beta_2 - 3\beta_1) x_t + \\ &+ (3\beta_1 - \beta_2) x_{t-1} - \beta_1 x_{t-2}. \end{aligned}$$

Формула (55) определяет тогда скользящую среднюю, коэффициенты которой

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \beta_1; \quad a_{-1} = \beta_2 - 3\beta_1; \quad a_0 = 1 + 3\beta_1 - 3\beta_2; \\ a_1 &= 3\beta_2 - \beta_1; \quad a_2 = -\beta_2 \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (51). В частном случае формулы (52) $\beta_1 = -3/35$ и $\beta_2 = 3/35$, т. е. вычитание этой оценки из тенденции эквивалентно применению оператора Δ_4 с точностью до множителя $3/35$.

4) Сезонные изменения

Рассмотрим содержащий сезонную составляющую ряд вида:

$$x_t = u_t + s_t + e_t. \quad (56)$$

Для уточнения предположим, что ряд x_t является помесечным. Период S для s_t будет тогда равен 12. Остановимся на оценке или на исключении сезонной составляющей s_t .

Пусть ряд не содержит никакой тенденции u_t или, точнее, пусть он включает постоянную тенденцию. Тогда естественный метод для оценки значения c_h , которое принимает s_t для месяца h (см. формулу (45)), состоит в вычислении среднего арифметического \bar{x}_h наблюде-

ний x_t , относящихся к этому месяцу. Оценка s_h будет тогда отклонением \bar{x}_h от среднего значения множества \bar{x} . Но наличие u_t приводит к смещенности этой оценки (за исключением того чрезвычайного случая, когда u_t и s_t будут ортогональны). Например, если при наблюдении шести последовательных лет тенденция будет возрастающей, то отклонение $\bar{x}_1 - \bar{x}$ для января содержит из-за u_t отрицательную составляющую, примерно равную противоположному значению среднего возрастания в течение пяти с половиной месяцев. Для оценки s_t нужно, таким образом, учитывать тенденцию u_t .

Первый метод в этом случае состоит в предварительном устранении тенденции. Однако скользящая средняя, которую мы применяли для этого, обычно влияет на значения s_t . При оценке тенденции по формуле (49) устранение тенденции оставит неизменным s_t в том и только в том случае, если

$$\sum_{\tau=-\theta}^{\theta} a_{\tau} s_{t+\tau} = 0. \quad (57)$$

Чтобы это было так для любого t и для всех возможных значений s_h , удовлетворяющих (46), необходимо, чтобы

$$\sum_{\tau=-\theta}^{\theta} a_{\tau} \delta_{h, t+\tau} \quad (58)$$

была постоянной величиной, не зависящей ни от h , ни от t (переменная δ_{ht} равна 1, если t относится к месяцу h , в противоположном случае — нулю). Это — очень ограничительное условие. Например, при $S = 12$ и $\theta = 6$ выражение (58) равно a_h , если имеется отклонение, равное k месяцам, между h и месяцем, к которому относится t ($-5 \leq k \leq 5$), и $a_{-6} + a_6$, если то же отклонение достигает 6 месяцев. Скользящая средняя для 13 месяцев, которая оставляет неизменной сезонную составляющую, определяется формулой

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\tau} = \frac{1}{12} \text{ для } -5 \leq \tau \leq 5, \\ a_{-6} = a_6 = \frac{1}{24}. \end{array} \right. \quad (59)$$

Однако соответствующий фильтр очень неточен для оценки или устранения тенденции: он полностью элиминирует лишь линейные тенденции¹. Для тенденции, представляющей колебания, он сопоставляет оценку, в которой колебания сильно уменьшены.

Эти трудности обусловили появление итеративных методов, основные черты которых можно описать следующим образом²:

¹ Квадратические тенденции заменяются константами, которые также устраняются, если рассматривают отклонения от среднего.

² Полное описание свойств применяемых на практике методов см. [277], [217]; [41, гл. 8]. Читатель, интересующийся развитием этих методов, может также обратиться к работе Дж. Дарбина [80], который предложил упрощение обычных формул и различные уточнения.

1) вначале применяют соответствующий (59) фильтр; тогда $\{x_i^{(1)}\}$ — полученный таким образом остаточный ряд;

2) вычисляют первую оценку $c_h^{(1)}$ сезонных членов для месячных средних значений $\bar{x}_h^{(1)} - \bar{x}^{(1)}$ ряда $\{x_i^{(1)}\}$; вычисляют:

$$x_i^{(2)} = x_i - \sum_h c_h^{(1)} \delta_{ht}$$

первую оценку ряда без сезонных изменений;

3) к $\{x_i^{(2)}\}$ применяют фильтр, который позволяет произвести более полное устранение тенденции путем использования, например, одного из фильтров, определенных в § 9 (1), тогда $\{x_i^{(3)}\}$ — новый остаточный ряд;

4) вычисляют вторую оценку $c_h^{(3)}$ сезонных членов с помощью месячных средних значений ряда $\{x_i^{(3)}\}$;

5) производят еще одну-две добавочные итерации того же вида.

Как отметил Э. Хэннан [138], [139], можно обойтись без итеративных методов этого вида и применить непосредственно к исходному ряду линейный фильтр, позволяющий произвести хорошее устранение тенденции. Эта операция основана на возможности точно определить изменения, которым надо подвергнуть сезонные члены для коррекции эффекта предварительной фильтрации. Для каждого фильтра достаточно определить один раз формулу изменений S коэффициентов v_k ($k = 0, 1, \dots, S - 1$), допускающую переход сезонных членов \hat{c}_h к несмещенным оценкам c_h^* :

$$c_h^* = \sum_{k=1}^S c_k v_{k-h}; \quad h = 1, 2, \dots, S, \quad (60)$$

где

$$v_{k-h} = v_{k-h+12}, \text{ если } k-h < 0.$$

Э. Хэннан [138, 139] объясняет, как можно вычислить коэффициенты v_k , и дает их значения для случая месячных рядов и для трех специальных фильтров¹.

10. Спектральный анализ нестационарных рядов

В § 7 было показано, как периодограмма некоторой реализации стационарного случайного процесса позволяет оценить его спектральную плотность. Мы также видели, что бывает удобно работать с рядом, из которого удалены сезонные изменения: необходимое сглаживание периодограммы без сезонных изменений будет испытывать влияние точек для периодов, соответствующих сезонным явлениям (S и ее

¹ На практике иногда следует учитывать, что сезонные члены изменяются с течением времени так, что для их оценки нужно обратиться к методам, отличным от простого вычисления средних значений остатков, относящихся к одному и тому же месяцу. Данные ранее ссылки уточняют обычно применяемые для этого методы. Ф. Неттгейм [234] изучает то же затруднение для случая, когда применяется метод Хэннана.

гармоники). Изучим теперь ряд, представляющий тенденцию u_t и имеющий вид:

$$x_t = u_t + \varepsilon_t, \quad (61)$$

где ε_t — стационарный процесс ¹.

Может показаться, что методы изучения стационарных процессов хорошо применимы к таким рядам, так как тенденция сводится к движению с очень большой периодичностью. Тогда значения на периодограмме наблюдаемого ряда $\{x_t\}$, соответствующие малым частотам, представляют тенденцию.

Такой подход к проблеме игнорирует следующий факт: если записывают разложение (61), то исходят из представления, что две составляющие играют различные роли. Например, для прогноза будущих значений x_t можно рассматривать ε_t как остаточный процесс, дающий некоторые характеристики зависимости при наличии связи u_t с некоторой функцией t , или даже объяснить его с помощью других величин.

Для уточнения предположим, что рассматривается линейная тенденция:

$$u_t = \alpha_0 + \alpha_1 t.$$

На каждом конечном интервале ($t = 1, 2, \dots, T$) периодограмма этой функции изменяется определенным образом. Однако при возрастании T эта периодограмма не стремится к какому-либо пределу, значение малых частот неограниченно повышается. Можно сказать, что периодограмма линейной функции не дает интересного представления.

Аналогично периодограмма ряда (61) представляет приближенную сумму периодограмм для u_t и ε_t . Из-за тенденции u_t она не является интересной характеристикой изучаемого явления.

Однако нужно иметь в виду два соображения. Во-первых, знание периодограммы наблюдаемого ряда $\{x_t\}$ может быть полезным для изучения свойств некоторых статистических процедур. Такого рода примеры даны в следующих главах. Так, при оценке эконометрических моделей иногда удобно рассматривать кумулятивную периодограмму некоторых экзогенных переменных (на рис. 4 прерывистой линией представлена первичная периодограмма ряда динамики текстильного производства; по ней можно констатировать преобладание низких частот). Но тогда периодограмма не рассматривается более как оценка спектра процесса.

Во-вторых, существует некоторый произвол в разложении (61), так как не уточняются ни природа тенденции, ни вид изменения спектра случайного ряда ε_t с низкими частотами. Для максимального использования преимуществ спектрального анализа обычно предпочитают хотя бы частичное определение тенденции ее предварительному исключению.

¹ Единственное рассматриваемое здесь отклонение от стационарности касается, таким образом, математического ожидания процесса x_t . В приложениях следует также изучать существование некоторой тенденции, влияющей на дисперсию процесса и некоторые другие его характеристики. Замена переменных, например переход к логарифмам, часто улучшает стационарность ряда.

Исключение можно произвести двумя способами.

1) Первый метод использует в качестве ε_t остатки относительного выравнивания с помощью полинома малой степени. Тенденция u_t определяется тогда, как близкая к этому полиному, а спектр для ε_t оценивается спектром остатков. Остатки необходимо отличаются от ошибок, так что оцениваемый подобным образом спектр содержит смещение (этот факт будет отмечен в гл. 13). Однако это смещение мало при низких частотах по крайней мере, если ряд не слишком короткий¹.

2) Во втором методе тенденция исключается с помощью линейного фильтра. Без сомнения, этот фильтр также влияет на случайные изменения ε_t ; оцененная для преобразованного ряда спектральная плотность $f_y^*(\omega)$ отличается от плотности $f_\varepsilon(\omega)$ процесса $\{\varepsilon_t\}$. Однако, зная величину усиления $G(\omega)$ фильтра, легко выправить $f_y^*(\omega)$, подставляя вместо нее оценку $f_\varepsilon^*(\omega) = f_y^*(\omega)/G(\omega)$.

Следует заметить, что второй метод не имеет очевидного применения к оценке тенденции. Даже после исключения тенденции с помощью фильтра в виде скользящей средней, который дает локальное выравнивание ряда, мы не считаем, что тенденция оценивается отклонением $u_t^* = x_t - y_t$, поскольку целью всей операции является как раз исправление систематического отклонения между рядами y_t и ε_t . Здесь четко видна разница точек зрения по сравнению с § 9(1) и 9(2). Тенденция рассматривается как составленная одновременно из функционального члена, полностью исключаемого фильтром (т. е. из члена z_t , являющегося решением уравнения в конечных разностях $z_t = \sum_{\tau} a_\tau z_{t+\tau}$), и составляющих с длинной периодичностью, которые более естественно отнести к тенденции, чем к случайным изменениям. Однако ни функциональный член, ни упомянутые составляющие не оцениваются этим методом.

Граница выбора в определении тенденции на практике уменьшается применением следующего основанного на здравом смысле правила и сохранением принципа экстенсивного определения случайного процесса. Когда $f_y^*(\omega)$ находится как скользящая средняя $2m + 1$ последовательных членов периодограммы, оценка получается начиная с

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}(m + 1).$$

Плотность $f_\varepsilon^*(\omega)$ оценивается в этом случае лишь для $\omega \geq \omega_0$. Аналогичное правило должно, по-видимому, приниматься при вычислении оценки $f_y^*(\omega)$ с помощью коррелограммы. Периодические составляющие тенденции имеют тогда частоты ω , меньшие ω_0 .

Например, рис. 9 изображает три оценки спектральной плотности ряда динамики текстильного производства (верхний график рис. 1). Эти три оценки были получены с помощью скользящих средних для семи последовательных членов периодограммы. Штриховая линия

¹ В принципе это смещение можно исправить, так как известен линейный оператор, определяющий соответствие между ошибками и остатками. По этому вопросу см. [137, гл. 5].

относится к самому ряду. Даже для больших частот на нее влияет наличие тенденции. Это объясняется тем, что вся линия расположена над двумя другими оценками, для которых тенденция была удалена. Сплошная линия относится к остаткам для множества чисел ряда, выравненного относительно полинома третьей степени по методу

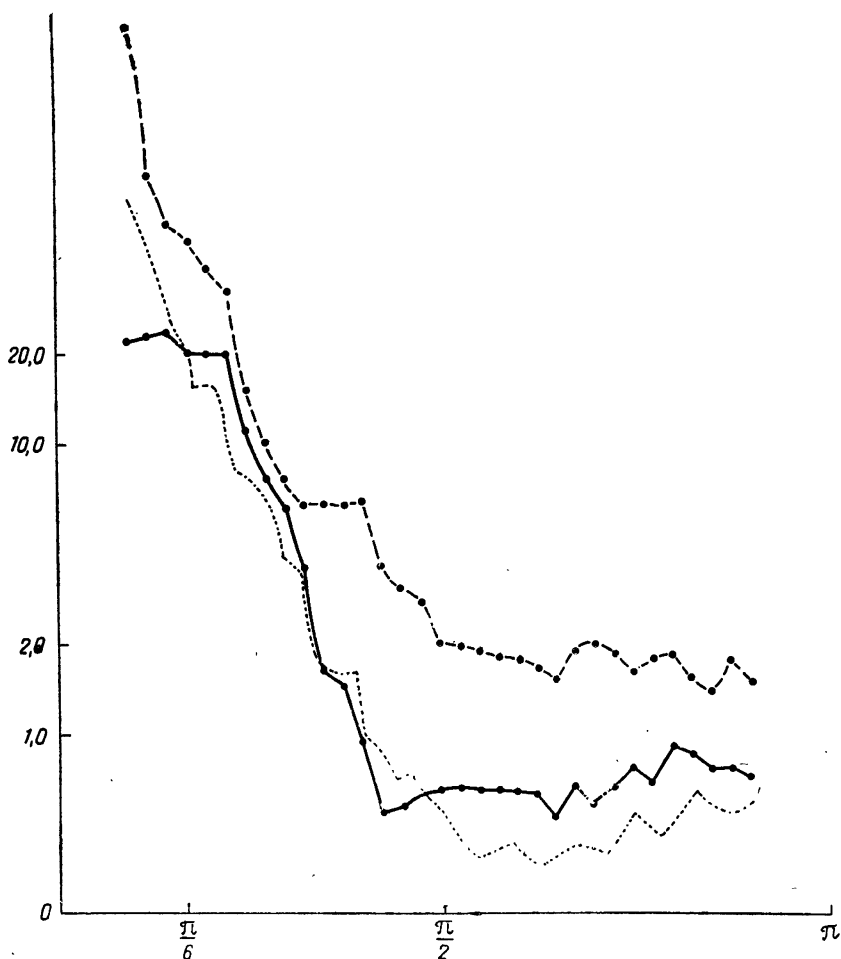


Рис. 9

наименьших квадратов. Линия, показанная мелким пунктиром, касается оценки, для которой тенденция исключена применением фильтра (39); таким образом, эта линия выведена из линии рис. 6 делением на величину усиления $G(\omega)$, данную формулой (40). Нельзя полностью сравнивать две линии — сплошную и мелким пунктиром, так как они соответствуют различным гипотезам о тенденции. Тем не менее можно видеть, что эти линии довольно близки. Для меньших

$\frac{\pi}{6}$ частот спектральная плотность остатков относительно полинома третьей степени наиболее мала. Это не удивительно, так как плотность не была выправлена. Для других частот она более значительна. Такой факт можно объяснить 8 дополнительными наблюдениями, которые содержат ряд остатков относительно фильтрованного ряда (крайние годы 1948 и 1967). Однако это также может объясняться преимуществами фильтра (39), который позволяет хорошо выделить тенденцию.

Дж. Дарбин [79] изучал проблему в общем виде. Концентрируя внимание на случае конечно-разностного фильтра для исключения тенденции, он установил следующее.

1) Применение конечных разностей порядка p и соответствующее преобразование $f_y^*(\omega)/G(\omega)$ приводит с точностью до постоянной к той же оценке $f_e^*(\omega)$ спектра $\{\varepsilon_t\}$, что и периодограмма, построенная для остатков $\hat{\varepsilon}_t$ между x_t и полиномом \hat{u}_t степени p , при соблюдении условий:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^r \hat{\varepsilon}_T &= \Delta^r \hat{\varepsilon}_1 \\ \text{или эквивалентно} \\ \Delta^r \hat{u}_T - \Delta^r \hat{u}_1 &= \Delta^r x_T - \Delta^r x_1 \end{aligned} \right\} \text{ для } r = 0, 1, \dots, p-1$$

(значения $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p+1}$, необходимые для вычисления $\Delta^p x_1$, предполагаются известными). Итак, \hat{u}_t определяется единственным образом с помощью первых и последних членов ряда. Составляющая тенденции u_t полностью устраняется только в том случае, если остатки $\hat{\varepsilon}_t$ не зависят от нее, т. е. если u_t есть полином степени p . (Определяющее $\hat{\varepsilon}_t$ преобразование линейно. Оно действует по отдельности на u_t и ε_t и преобразует u_t в постоянную тогда и только тогда, когда u_t является полиномом по t степени p .)

2) Однако, если u_t является достаточно регулярной функцией от t , смещение в $f_e^*(\omega)$, появляющееся от составляющей тенденции, будет существенным лишь для малых частот. Точнее, для частот $\omega_j = 2\pi j/T$, где $j = 1, 2, \dots, (T-1)/2$, смещение уменьшается вместе с j по меньшей мере, как $j^{-(p+1)}$. Для сравнения можно рассмотреть смещение периодограммы, построенной с помощью остатков полинома степени p , выравненного методом наименьших квадратов. Порожденное тенденцией смещение уменьшается тогда лишь как j^{-2} .

Таким образом, метод конечных разностей позволяет произвести полное устранение тенденции лишь в случае полиномиальной тенденции. Метод наименьших квадратов достигает того же результата и приводит к более точной оценке полинома. Однако с момента превращения тенденции в регулярную метод конечных разностей должен привести к лучшей оценке спектральных характеристик $\{\varepsilon_t\}$ для больших частот; это именно те частоты, для изучения которых желают устранить тенденцию.

Согласно формуле (55) каждая скользящая средняя идентична некоторому методу конечной разности, примененному к линейной комби-

нации некоторого малого числа последовательных членов. Таким образом, сглаживание с помощью скользящих средних, по-видимому, должно приближенно отражать существенные свойства метода конеч-

ных разностей при изучении больших частот остаточного случайного процесса $\{e_t\}$.

Три линии рис. 9 показывают, что спектральная плотность сильно уменьшается во всей области частот, соответствующих циклам длительностью более года. Изменения будут меньшими для больших частот. К. Грэнджер [125] заметил, что этот тип эволюции наблюдается в большинстве эконометрических рядов. Он даже считал, что следует говорить о *типичном спектре экономического ряда*. В качестве примера рис. 10 воспроизводит спектральные плотности, оцененные соответственно для производства, занятости и продолжительности рабочей недели во французской промышленности¹. Ряд занятости имеет временной профиль, довольно регулярный. Он дает наиболее сильно изменяющийся спектр, который в ты-

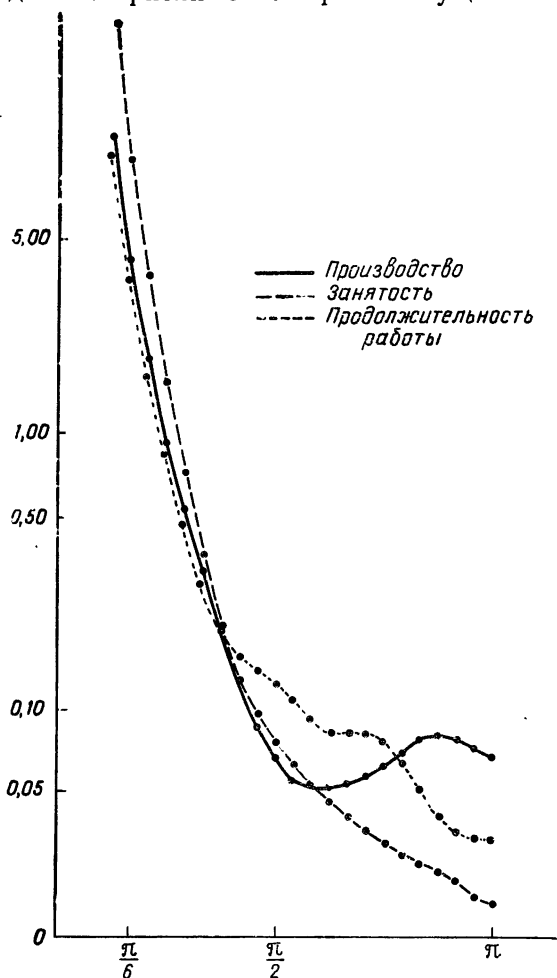


Рис. 10

сячу раз больше для шестилетнего цикла, чем для больших частот. Хотя ряд для продолжительности рабочей недели содержит лишь одну слабую составляющую тенденций, ее спектр имеет тот же убывающий вид, что и спектры двух других рядов, так как шестилетний цикл там также доминирует.

¹ Полученные с помощью исправленных временных рядов оценки для сезонных изменений относятся к периоду с 1948 по 1967 г. Три ряда дважды подвергались фильтрации по формулам (39) и (41) с $\theta = 4$ и $a = 0,8$. Затем они преобразовывались с помощью окна Тьюки с использованием двенадцати первых членов коррелограммы.

Не должно удивлять, что экономические ряды имеют спектры сходного вида: этот факт лишь отражает значение и общность конъюнктурных колебаний и длительных эволюций экономического роста. Впрочем, существуют и различия, что видно на рис. 10. В последующих главах мы увидим, что эта общность изменения спектров экономических рядов применяется в эконометрии.

11. Какие ряды использовать для статистических оценок?

В двух предыдущих параграфах рассматривался вопрос, который не относится прямо к теме этой главы, но имеет большое практическое значение для эконометрии.

Итак, во временном ряду обычно различают составляющие, соответствующие тенденциям, циклическим и сезонным изменениям. Этот анализ позволяет более удобно интерпретировать статистические данные. Так, изменение индекса промышленного производства от месяца к месяцу отражает частично сезонные влияния, частично более существенные изменения экономической активности. Этими изменениями особенно интересуются специалисты по конъюнктуре. Поэтому они вычисляют и используют индекс с элиминированной сезонностью, полученный из первоначального индекса вычитанием индекса оценки сезонной составляющей. Также иногда полезно рассматривать ряды с исключенной тенденцией. Например, потребление электроэнергии возрастает приблизительно экспоненциально, соответственно удваиваясь за каждые десять лет. Его годовые колебания можно описать с помощью индекса отношения годовых данных к тенденции. Это более показательно, чем первичные данные.

До начала статистической оценки экономической модели необходимо выяснить, не стоит ли внести некоторые исправления в непосредственно наблюдаемые временные ряды. Для уточнения задачи предположим, что по квартальной статистике пытаются получить регрессию между ввозом сырья и промышленным производством. Нужно ли устранить вначале ряды сезонных изменений или, может быть, даже тенденцию?

Ответ на этот вопрос можно дать лишь после точного изучения смысла оцениваемой модели. Пусть предполагаемая зависимость имеет вид:

$$x_t = az_t + b + \varepsilon_t.$$

Применять ли ее к исходным данным, относящимся к ввозу (x_t) и к промышленной продукции (z_t)? Или же применять ее к исправленным данным (после устранения сезонного движения, а может быть, даже тенденции)? В первом случае следует вычислять регрессию для исходных данных; во втором — регрессию для исправленных данных.

Модель дает причинное объяснение уровня ввоза исходя из объема промышленного производства. Если оказывается, что для некоторого квартала, например третьего, промышленное производство сокращается, импорт также должен быть сокращен. Относительный размах

сезонных движений двух рядов образует важный элемент для оценки модели. Исключить эти движения — значит лишиться части информации наблюдаемых рядов. Поэтому предпочтительнее использовать исходные данные.

Это рассуждение предполагает, что модель дает полное объяснение уровня ввоза для каждого квартала. Можно предположить, что на самом деле зависимость более сложна. Например, существует сезонное накопление импортируемого сырья. Если потребление импортируемого сырья хорошо объясняется непосредственно объемом промышленного производства, в исходных данных о ввозе также отражается влияние этих сезонных накоплений. Предварительное устранение сезонных изменений двух рядов позволяет игнорировать эту особенность.

Впрочем, возможно, что на объем ввоза влияют прогрессирующие изменения международной специализации. Общая тенденция импорта не объясняется тогда лишь тенденцией объема промышленного производства. В этом случае трудность преодолевается вычислением регрессии между рядами после устранения чистой тенденции в каждом из них.

Эти аргументы лишь частично убедительны. Пойдя по этому пути, трудно различить, где следует остановиться в корректировке рядов. Чем более изменяются исходные данные, тем более осторожно следует относиться к оцениваемой зависимости, во всяком случае, ее становится трудно интерпретировать. Если первоначальная модель не дает достаточного объяснения рассматриваемого явления, следует попытаться ее улучшить, вводя явным образом исключенные факторы (накопление запасов, изменение в структуре производства и т. д.).

Однако нужно заметить, что никакая модель не является совершенной. Часто приходится работать с грубыми представлениями, иначе невозможно прийти к какому-нибудь результату. В частности, очень трудно измерять некоторые элементы, которые играют важную роль в изучаемых зависимостях (политика обменов, например). Учет этих элементов в туманной форме «сезонных факторов» или «факторов тенденции» иногда является единственным практическим решением проблемы.

В этой связи следует, однако, не упускать из вида два факта, проявляющиеся особенно ясно при применении техники множественной регрессии для устранения сезонных факторов или тенденции¹.

Во-первых, *каждый исправленный ряд имеет число степеней свободы меньше, чем ряд наблюдений*. В целом процедура исключения производится для получения ряда остатков. Если последний является множественной регрессией, предполагающей оценку p сезонных коэффициентов или тенденции, T значений исправленного ряда должны априори удовлетворять p линейным соотношениям. Таким образом, при применении общих формул, относящихся к оценкам или критериям, следует заменить T на $T - p$. Положение осложняется, когда

¹ Два последующих замечания подробно анализирует М. Ловэлл [199].

метод исключения не является линейным. Однако исправленный ряд всегда содержит меньше информации, чем не корректированный ряд той же длины, непосредственно соответствующий изучаемой модели. Это уменьшение числа степеней свободы часто не учитывается в эконометрических работах, хотя оно может быть существенным.

Во-вторых, *когда сезонные факторы или тенденции входят в изучаемые явления, возможно сконструировать модель, которая применяется к исходным рядам* и объединяет возможные априорные идеи относительно их взаимной зависимости. Для представления сезонных эффектов достаточно ввести изучаемые факторы явно, например, прибавляя к истинным экспликативным переменным z_{jt} время (или полином, являющийся функцией времени), и, таким образом, представить тенденцию и вспомогательные переменные (см. гл. 8, § 1)¹.

В сравнении с такой законченной процедурой обычный метод является способом оценки, в котором вычисление проводится в два последовательных этапа: 1) удаление сезонных факторов или тенденции; 2) выравнивание по исправленным данным. Свойства этого метода должны специально изучаться в каждом частном случае.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, в которой числовая переменная x есть линейная функция некоторой другой переменной z с аддитивной постоянной, зависящей от сезона. Полная модель записывается в виде:

$$x_t = az_t + c's_t + \varepsilon_t.$$

В этом уравнении s_t — вектор вспомогательных переменных, относящихся к сезонам. Если они были вычислены с помощью множественной регрессии, ряды с устраненными сезонными движениями относительно x и z имели бы вид:

$$u_t = x_t - m_{xs} M_{ss}^{-1} s_t, \quad w_t = z_t - m_{zs} M_{ss}^{-1} s_t$$

(в обычных обозначениях). Легко проверить, что в этом случае коэффициент регрессии a^* между рядами изменений с элиминированной сезонностью совпадает с коэффициентом, который получился бы для z , если полную модель множественной регрессии выровнять на основе исходных рядов. Эта закономерность, впервые установленная Р. Фришем и Ф. Боу [110], показывает, что в этом случае выравнивание исправленных рядов затрагивает свойство эффективности характеристик множественных регрессий.

12. Спектральный анализ зависимостей между рядами

При изучении в гл. 1 характеристик зависимостей между экономическими величинами были рассмотрены регрессии, которые базировались на вычислении матриц эмпирических ковариаций. Тогда нас

¹ Предложенный в гл. 8 метод предполагал строго аддитивный эффект сезонности. Основывающиеся на принципах ковариационного анализа формулировки включают более сложные ситуации (см. по этому поводу, например [185]).

интересовали лишь зависимости между значениями этих величин, например x_t и z_t . Однако временной аспект этих рядов требует изучения зависимости между величинами, относящимися к разным наблюдениям. Влияние величины z на величину x происходит во времени, так что зависимость между z_{t-1} и x_t может быть сильнее зависимости между z_t и x_t . Как выявить этот тип отношений?

1) Перекрестные коррелограмма и периодограмма

Естественно вычислять ковариации между рядами, сдвинутыми одни относительно других, а также некоторые регрессии, содержащие подобные сдвиги. Здесь будут изучены регрессии, которые снова встретятся в гл. 14—15 при оценке весьма специфических моделей.

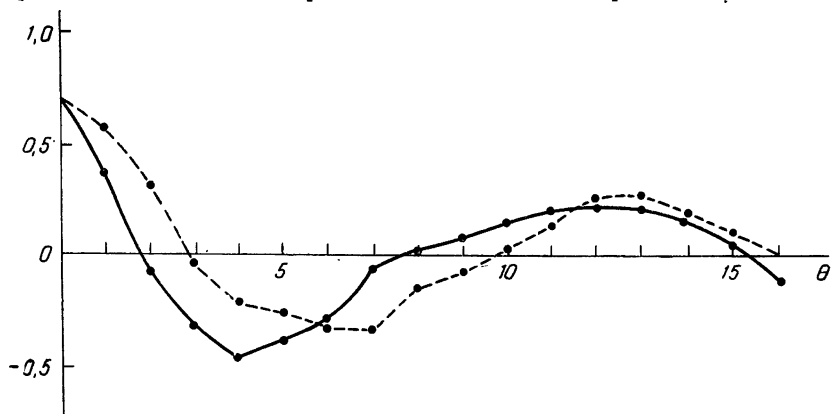


Рис. 11

Определим:

$$C_{\theta}(x, z) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\theta} (x_t - \bar{x})(z_{t+\theta} - \bar{z}) \quad (62)$$

и

$$r_{\theta}(x, z) = \frac{C_{\theta}(x, z)}{[C_0(x, x)C_0(z, z)]^{1/2}}. \quad (63)$$

$C_{\theta}(x, z)$ суть ковариации с запаздыванием для x и z , а последовательность $r_{\theta}(x, z)$ есть *перекрестная коррелограмма* от x и z . Эмпирическая коррелограмма от x , определенная формулами (1)—(3) в начале этой главы, имеет, очевидно, в качестве членов $r_{\theta}(x, x)$. Заметим, что $C_{\theta}(x, z)$ и $r_{\theta}(x, z)$, вообще говоря, отличаются соответственно от $C_{\theta}(z, x)$ и $r_{\theta}(z, x)$. Удобно определить эти величины для отрицательных значений θ соотношениями:

$$C_{\theta}(x, z) = C_{-\theta}(z, x), \quad r_{\theta}(x, z) = r_{-\theta}(z, x). \quad (64)$$

В качестве примера рис. 11 дает перекрестную коррелограмму двух квартальных рядов, относящихся к динамике французского

текстильного производства за 1948—1967 гг., занятости (x) и продукции (z)¹. Сплошная кривая соответствует положительным значениям θ (запаздывание производства относительно занятости), штриховая линия — отрицательным значениям (запаздывание занятости относительно производства). Как и в коррелограммах, построенных для данного ряда, значения берут обычно лишь до какой-то доли T , здесь $|\theta| \leq 16$. В этом случае можно констатировать, что $r_\theta(x, z)$ имеют тенденцию быть большими для отрицательных θ , чем для положительных θ . Это показывает, что занятость приспосабливается к изменению производства с некоторым опозданием.

Аналогично можно определить *перекрестную периодограмму*, которая обобщает периодограмму, определенную для каждого ряда отдельно. Для каждой частоты

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

формулы (11) § 2 связывают с рядом x_t две величины a_k и b_k . Теперь будет удобно представить эти две величины комплексным числом $X_k = a_k + ib_k$, которое можно назвать составляющей Фурье, и уравнение (11) переписать в форме:

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{t=1}^T x_t e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, 2, \dots, T'' \quad (65)$$

(где i — мнимое число $\sqrt{-1}$), T'' равно $(T-1)/2$ или $(T/2) - 1$ в зависимости от того, будет ли T нечетным или четным. Формула (14), определяющая периодограмму $\{x_t\}$, записывается в виде:

$$I_{xk} = X_k \bar{X}_k, \quad (66)$$

где \bar{X}_k означает (не смешивать со средними арифметическими) комплексное число, сопряженное с X_k , т. е. $a_k - ib_k$.

Подобным же образом можно сопоставить последовательности z_t комплексное число

$$Z_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{t=1}^T z_t e^{i\omega_k t}$$

и периодограмму $I_{zk} = Z_k \bar{Z}_k$. Перекрестная периодограмма для x относительно z определяется тогда, естественно, таким образом:

$$J_k(x, z) = X_k \bar{Z}_k. \quad (67)$$

Это — комплексное число, интерпретацию которого мы вскоре получим. Сопряженное число равно $J_k(z, x)$, перекрестной периодограмме от z относительно x .

¹ В самом деле, x_t отражает занятость в начале квартала и z_t — уровень производства, достигнутый в течение квартала. Из этих двух рядов была предварительно устранена тенденция применением фильтра (39) с $\theta = 4$.

2) Передаточная функция и когерентность

X_h и Z_h можно представить в комплексной плоскости (см. рис. 12). Периодограммы I_{xh} и I_{zh} измеряют длины соответствующих векторов, т. е. вклад частоты ω_h в представлении Фурье двух рядов. (Как было указано в § 2, единичные векторы осей комплексной плоскости соответствуют рядам $\cos \omega_h t$ и $\sin \omega_h t$, умноженным на множитель $\sqrt{\frac{2}{T}}$; с точностью до того же множителя вектор X_h соответствует ряду $A_{xh} \cos(\omega_h t + \varphi_{xh})$, где числа A_{xh} и φ_{xh} будут соответственно длинной X_h и углом между X_h и действительной осью.)

Для характеристики относительного положения двух синусоидальных составляющих с частотой ω_h , например $A_{xh} \cos(\omega_h t + \varphi_{xh})$ и $A_{zh} \cos(\omega_h t + \varphi_{zh})$, можно принять комплексное число X_h/Z_h , равное $J_h(x, z)/I_{zh}$. Модуль этого числа равен отношению амплитуд A_{xh} и A_{zh} , а аргумент — разности фаз φ_{xh} и φ_{zh} . Отсюда следует, что перекрестная периодограмма $J_h(x, z)$ имеет модуль $A_{xh}A_{zh}$ и аргумент $\varphi_{xh} - \varphi_{zh}$.

Однако X_h и Z_h , полученные для последовательных значений k , изменяются довольно беспорядочно. Причина этого объяснена в § 7. Вместо отношения X_h/Z_h интереснее найти характеристику, применимую в среднем на интервале $[k - m, k + m]$, включающем k .

Предположим, что в рассматриваемом интервале сдвиг фазы и отношение между амплитудами составляющих разложения Фурье, соответствующих одной и той же частоте ω_{k+h} , стремятся к постоянным величинам; тогда их можно оценить. Точнее, примем модель:

$$X_{k+h} = T_h Z_{k+h} + E_{k+h}, \quad h = -m, \dots, m-1, m, \quad (68)$$

где T_h — комплексное число, не зависящее от h , и E_{k+h} — блуждающая комплексная составляющая. Задача сводится к оценке T_h с помощью $2m + 1$ наблюдений для пары переменных (X_{k+h}, Z_{k+h}) .

Применение к этой ситуации метода наименьших квадратов приводит к выбору для T_h числа, которое минимизирует сумму S_h произведений $(X_{k+h} - T_h Z_{k+h})$ с их соответствующими сопряженными значениями. (В самом деле, можно рассматривать эту сумму произведений как квадрат расстояния в пространстве $R^{2(2m+1)}$, гомеоморфном декартову произведению $2m + 1$ комплексных плоскостей, сопоставленных различным значениям h .)

Для минимизации суммы S_h определим T_h^* равенством:

$$T_h^* = \sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{Z}_{k+h} \left/ \sum_{h=-m}^m Z_{k+h} \bar{Z}_{k+h} \right. \quad (69)$$

и запишем:

$$X_{k+h} - T_k Z_{k+h} = [X_{k+h} - T_k^* Z_{k+h}] + [(T_k^* - T_k) Z_{k+h}]. \quad (70)$$

Если S_k разложить с помощью правого члена этого последнего равенства, то сумма попарных произведений обращается в нуль в силу определения T_k^* ; каждая из двух других сумм неотрицательна; S_k достигает, таким образом, минимума для $T_k = T_k^*$.

Комплексное число T_k^* характеризует, таким образом, зависимость ряда $\{x_t\}$ относительно ряда $\{z_t\}$ в окрестности частоты ω_k . Это число можно записать в виде $T^*(\omega_k)$ и рассматривать его как функцию ω_k ; это *передаточная функция* $\{x_t\}$ относительно $\{z_t\}$. (Далее увидим, что $T^*(\omega_k)$ можно рассматривать как оценку теоретической передаточной функции $T(\omega_k)$ с определением, аналогичным данному в гл. 11, § 5.) Ее модуль показывает, на какое число надо умножить амплитуды составляющих $\{z_t\}$, частота которых близка к ω_k , для получения приближений компонент, соответствующих $\{x_t\}$. Аналогично ее аргумент определяет применяемый сдвиг фазы.

Вообще, эта зависимость не является полной. Это и выражает аддитивный член E_{k+h} модели (68). Для ее полной характеристики необходимо еще измерить степень ее точности. Квадрат R^2 классического коэффициента множественной корреляции, используемый в теории регрессии, равен здесь отношению между суммами величин:

$(T_k^* Z_{k+h})(\overline{T_k^* Z_{k+h}})$ и $X_{k+h} \bar{X}_{k+h}$, т. е.

$$C^*(\omega_k) = \frac{\sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{Z}_{k+h} \cdot \sum_{h=-m}^m \bar{X}_{k+h} Z_{k+h}}{\sum_{h=-m}^m Z_{k+h} \bar{Z}_{k+h} \cdot \sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{X}_{k+h}}. \quad (71)$$

Этот коэффициент называется когерентностью. Он равен 1, если в уравнении (68) $E_{k+h} = 0$ для каждого h от $-m$ до m . В других случаях с помощью классического неравенства Шварца устанавливается, что он меньше 1.

3) Коспектры

Передаточные функции $T^*(\omega_k)$ и когерентности $C^*(\omega_k)$ являются теми характеристиками, оценки которых мы уже пытались найти. Для их вычисления и изучения их свойств формулы (69) и (71) следует несколько преобразовать. Из них определяют величины, которые уже встречались в спектральном анализе изолированного ряда. Так,

$$\sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{X}_{k+h} = \sum_{h=-m}^m I_{x, k+h} = 4\pi (2m+1) f_x^*(\omega_k),$$

где $f_x^*(\omega)$ — оценка спектра $\{x_t\}$ по формуле (32). Определим таким же образом *комплексный эмпирический коспектр* для x относительно z

как комплексную функцию $c^*(\omega) - iq^*(\omega)$, определяемую равенством:

$$4\pi [c^*(\omega_h) - iq^*(\omega_h)] = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m J_{h+h}(x, z). \quad (72)$$

(При необходимости уточнить переменные, к которым относится комплексный коспектр, их следует записывать в виде $c_{xz}^*(\omega)$ и $q_{xz}^*(\omega)$. Мы не будем так поступать во избежание усложнения обозначений так же, как мы не делали этого для определенных ранее функций $T^*(\omega)$ и $C^*(\omega)$.) Функции $c^*(\omega)$ и $q^*(\omega)$ называются соответственно *коспектр* и *квадратура спектра*. Надо избегать путаницы, к которой может привести одновременное употребление выражений «комплексный коспектр» и «коспектр», по-английски «power cospectrum» и «cospectrum»¹.

При новом определении можно заменить (69) и (71) на

$$T^*(\omega) = \frac{c^*(\omega) - iq^*(\omega)}{f_z^*(\omega)}; \quad (73)$$

$$C^*(\omega) = \frac{[c^*(\omega)]^2 + [q^*(\omega)]^2}{f_x^*(\omega) \cdot f_z^*(\omega)}. \quad (74)$$

Обозначая через $[G^*(\omega)]^{1/2}$ и $\varphi^*(\omega)$ модуль и аргумент $T^*(\omega)$, можно записать:

$$G^*(\omega) = C^*(\omega) \cdot \frac{f_x^*(\omega)}{f_z^*(\omega)}; \quad (75)$$

$$\varphi^*(\omega) = -\text{Arctg } q^*(\omega)/c^*(\omega) + \delta\pi, \quad (76)$$

где δ равно нулю, если $c^*(\omega)$ положительно, и равно 1, если оно отрицательно. Если $c^*(\omega)$ оказывается равным нулю, $\varphi^*(\omega)$ равно $\pm(\pi/2)$ в зависимости от того, отрицательно или положительно $q^*(\omega)$.

Для вычисления функций $c^*(\omega)$ и $q^*(\omega)$ следует отделить действительную и мнимую части $J_{h+h}(x, z)$. Пользуясь снова формулами (11), примененными к $\{x_t\}$ и $\{z_t\}$, формулами, определявшими a_{xh} , b_{xh} , a_{zh} , b_{zh} , и, учитывая, что

$$X_h = a_{xh} + ib_{xh} \text{ и } Z_h = a_{zh} + ib_{zh},$$

можно вывести из (67) и (72):

$$4\pi c^*(\omega_h) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m (a_{x, h+h} a_{z, h+h} + b_{x, h+h} b_{z, h+h});$$

$$4\pi q^*(\omega_h) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m (a_{x, h+h} b_{z, h+h} - b_{x, h+h} a_{z, h+h}).$$

Введенные до сих пор величины мы рассматривали как эмпирические характеристики временных рядов. Они образуют оценки

¹ В настоящее время вместо термина «комплексный коспектр» чаще используют другой — «кросс-спектр». — *Прим. ред.*

характеристик двухмерного случайного процесса, реализацией которого будет ряд пар $\{x_t, z_t\}$. Итак, эмпирическая ковариация $C_\theta(x, z)$ соответствует теоретической ковариации:

$$\gamma_\theta(x, z) = E\{[x_t - E(x_t)][z_{t+\theta} - E(z_t)]\}. \quad (77)$$

Комплексный эмпирический коспектр соответствует теоретическому комплексному коспектру:

$$c(\omega) - iq(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\theta=-T}^T \gamma_\theta(x, z) e^{-i\omega\theta}. \quad (78)$$

Определение последнего напоминает определение спектральной плотности, данное в гл. 11 формула (11). (Мы предполагаем здесь существование предела — ситуация, подобная существованию спектральной плотности одномерного процесса.) Аналогично передаточная функция и когерентность соответствуют теоретическим характеристикам, которые легко определяются формулами (73) и (74).

Коспектр $c(\omega)$ и квадратура спектра $q(\omega)$ сравнимы с плотностями. Можно показать¹, что для значения $\omega = \omega_k$ и с множителем $1/4\pi$ они равны математическим ожиданиям действительной части и мнимой части с отрицательным знаком перекрестной периодограммы $J_k(x, z)$. Однако дисперсия последней с ростом T не стремится более к нулю, как для обычной периодограммы I_{xk} . Как для оценки спектральной плотности $f_x^*(\omega)$ было заменено на I_{xk} , так $c^*(\omega)$ и $q^*(\omega)$ заменяются на $J_k(x, z)$ для оценки $c(\omega)$ и $q(\omega)$. Формула (72), сравнимая с (32), показывает, что сглаживание перекрестной периодограммы производится с помощью скользящей средней для $2m+1$ последовательных членов, т. е. с использованием «окна Даниеля».

Но если $f_x(\omega)$ и $f_z(\omega)$ оценивались с помощью сглаживания, использующего другое окно, следует применить это же сглаживание и для оценки $c(\omega)$ и $q(\omega)$. В частности, если это сглаживание позволяет произвести прямую оценку спектральной плотности с помощью первых членов коррелограммы, то оценки $\hat{c}(\omega)$ и $\hat{q}(\omega)$ вычисляются непосредственно с помощью членов перекрестной коррелограммы, соответствующих малым значениям $|\theta|$.

Заменим формулу (33) на

$$\hat{c}(\omega) - i\hat{q}(\omega) = \sum_{\theta=-n}^n \lambda_\theta C_\theta(x, z) e^{-i\omega\theta} \quad (79)$$

и запишем (79) в форме:

$$\hat{c}(\omega) = \lambda_0 C_0(x, z) + \sum_{\theta=1}^n \lambda_\theta [C_\theta(x, z) + C_\theta(z, x)] \cos \omega\theta; \quad (80)$$

$$\hat{q}(\omega) = \sum_{\theta=1}^n \lambda_\theta [C_\theta(x, z) - C_\theta(z, x)] \sin \omega\theta \quad (81)$$

¹ Как и в § 7, здесь и в дальнейшем предполагается, что ряды x_t и z_t имеют нулевые математические ожидания, а если это не так, — что периодограммы были вычислены для отклонений от средних.

(числа λ_0 характеризуют окно; они обладают свойством $\lambda_0 = \lambda_{-0}$). Так, передаточные функции и когерентность, изображенные на рис. 13, вычислялись с помощью оценок $\hat{c}(\omega)$ и $\hat{q}(\omega)$, полученных при $n = 12$, и окна Тьюки, которое было определено формулой (37).

4) Точность оцененных характеристик

Определенные выше эмпирические характеристики можно рассматривать как оценки теоретических характеристик некоторого двухмерного стационарного процесса. Это придает смысл измерению точности вычисляемых характеристик. В качестве примера рассмотрим два вопроса, наиболее важных в прикладной эконометрии¹. С какой точностью оценивается передаточная функция $T(\omega)$? Является ли вычисленная когерентность значимой для реальной связи между рядами $\{x_t\}$ и $\{z_t\}$ относительно частоты ω ?

Ответить на эти вопросы можно, вернувшись к уравнениям (68) и применив их не только к наблюдаемым рядам, но и лежащему в их основании случайному процессу. Точнее говоря, мы допустим, что могут быть определены комплексные случайные величины² E_{k+h} , не коррелирующие между собой и с Z_{k+h} , такие, что формула (68) применяется в малой полосе частот шириной $(2m+1)$ вокруг ω_k . Спектральная теория многомерных случайных процессов дает обоснование этой модели, которая применима в той мере, в какой передаточная функция $T(\omega)$ постоянна в рассматриваемой полосе. Мы предположим это в виде первого приближения³.

Согласно этой же теории комплексную переменную E_{k+h} можно идентифицировать с двухмерным случайным вектором, причем действительная часть RE_{k+h} и мнимая IE_{k+h} для E_{k+h} — его компоненты, а вектор, ковариационная матрица которого имеет форму $\Sigma_k^2 I$ с подходящим числом Σ_k . $2m+1$ независимых величин E_{k+h} можно тогда идентифицировать с вектором E евклидова пространства $2(2m+1)$ измерений, причем этот вектор имеет сферический индикаторный эллипсоид. Аналогично величины X_{k+h} можно идентифицировать с некоторым вектором X того же пространства.

В предположении, что теоретическая передаточная функция T_k будет равна нулю, когерентность $C(\omega_k)$ будет иметь то же распределение, что и квадрат R^2 коэффициента множественной корреляции, вычисленный по регрессии для выборки $2(2m+1)$ не коррелированных между собой наблюдений. В первом приближении можно рассуждать так, как если бы процесс $\{x_t\}$ был нормальным, и использовать обычные статистические таблицы. Так, в случае $m = 3$ когерентность сравнима с коэффициентом множественной корреляции, вычисленным по регрессии для 2 экзогенных переменных и 14 наблюдений. Уровень значи-

¹ Для дополнений и определения дисперсий коспектров см. [241].

² Различие между определенными таким образом E_{k+h} и теми, которые мы ввели для вычисления перекрестной периодограммы в точности соответствует различию между ошибками и остатками при рассмотрении обычных линейных моделей.

³ См. [176].

мости F_0 в 5%-ной переменной Фишера равен 3,88 для 2 и 12 степеней свободы. Поэтому уровень значимости для $C^*(\omega_k)$ дается соотношением:

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{12} F_0} = 0,39$$

при уровне 5%. Более общим образом

$$\frac{2mC^*(\omega_k)}{1 - C^*(\omega_k)}$$

будет распределено как переменная Фишера с 2 и $4m$ степенями свободы.

* Рассмотрим теперь точность оценки передаточной функции $T(\omega)$.

Комплексное число T_k можно уподобить вектору T , две компоненты которого — действительная часть RT_k и мнимая часть IT_k от T_k . Остается выяснить, как преобразовать множество $2m+1$ комплексных чисел Z_{k+h} так, чтобы снова получить классический вид линейной модели. В правой части (68) первый член записывается как $RT_k \cdot RZ_{k+h} - IT_k \cdot IZ_{k+h}$ для действительной составляющей X_{k+h} и $RT_k \cdot IZ_{k+h} + IT_k \cdot RZ_{k+h}$ — для мнимой.

В структуре матрицы M_{zz} гл. 6 наблюдение, относящееся к действительной составляющей X_{k+h} , будет соответствовать:

$$\begin{bmatrix} (RZ_{k+h})^2 & -RZ_{k+h} \cdot IZ_{k+h} \\ -RZ_{k+h} \cdot IZ_{k+h} & (IZ_{k+h})^2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично наблюдение, относящееся к мнимой составляющей X_{k+h} , будет соответствовать:

$$\begin{bmatrix} (IZ_{k+h})^2 & IZ_{k+h} \cdot RZ_{k+h} \\ IZ_{k+h} \cdot RZ_{k+h} & (RZ_{k+h})^2 \end{bmatrix}.$$

Суммирование матриц, соответствующих всем составляющим X , приводит, таким образом, к следующему равенству:

$$M_{zz} = \frac{I}{2(2m+1)} \sum_{h=-m}^m Z_{k+h} \bar{Z}_{k+h}, \quad (82)$$

где I — единичная матрица второго порядка.

Таким же образом можно идентифицировать числа m_{xx} и $a^{*'} M_{zz} a^*$ гл. 6:

$$m_{xx} = \frac{1}{2(2m+1)} \sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{X}_{k+h};$$

$$a^{*'} M_{zz} a^* = \frac{T_k^* \bar{T}_k^*}{2(2m+1)} \sum_{h=-m}^m Z_{k+h} \bar{Z}_{k+h}.$$

Учитывая уравнения (66), (69) и (71), оценку

$$\Sigma_k^{*2} \text{ для } \Sigma_k^2, \text{ т. е. } m_{xx} - a^{*'} M_{zz} a^*,$$

умноженную на $\frac{2m+1}{2m}$, можно записать в форме:

$$\Sigma_k^{*2} = \frac{1 - C^*(\omega_k)}{4m} \sum_{h=-m}^m I_{x, k+h}. \quad (83)$$

Ковариационная матрица действительной и мнимой частей T_k^* оценивается тогда произведением M_{zz}^{-1} на $\Sigma_k^{*2}/2 (2m+1)$. Форма M_{zz} показывает, что ее действительная и мнимая части не коррелированы между собой и имеют одинаковую дисперсию, оцениваемую величиной:

$$\frac{1 - C^*(\omega_k)}{4m} \cdot \frac{f_x^*(\omega_k)}{f_z^*(\omega_k)}. \quad (84)$$

Для интерпретации передаточной функции обычно изучают ее модуль и аргумент, а не ее действительную и мнимую части. Запишем ее в форме:

$$T(\omega) = \sqrt{G(\omega)} e^{i\varphi(\omega)} \quad (85)$$

и найдем приближенную формулу для дисперсий оценок $\sqrt{G_k^*}$ и φ_k^* , которая будет равна: $T_k^* = \sqrt{G_k^*} e^{i\varphi_k^*}$. Предположим для этого, что отклонение между T_k^* и $T(\omega_k)$ мало, так что его можно представить дифференциальным элементом dT . Тогда исходя из (85) для действительной и мнимой частей dT запишем:

$$\left. \begin{aligned} dRT &= \cos \varphi \cdot d\sqrt{G} - \sqrt{G} \sin \varphi \cdot d\varphi, \\ dIT &= \sin \varphi \cdot d\sqrt{G} + \sqrt{G} \cos \varphi \cdot d\varphi, \end{aligned} \right\}$$

откуда получим:

$$\left. \begin{aligned} d\sqrt{G} &= \cos \varphi \, dRT - \sin \varphi \, dIT, \\ \sqrt{G} d\varphi &= \sin \varphi \, dRT + \cos \varphi \, dIT. \end{aligned} \right\}$$

Так как dRT и dIT имеют нулевую корреляцию и одинаковую дисперсию, произведение $\sqrt{G} d\sqrt{G} d\varphi$ обладает нулевым математическим ожиданием. *Корреляция между $\sqrt{G_k^*}$ и φ_k^* в первом приближении равна нулю.* Более того, приближенные дисперсии $\sqrt{G_k^*}$ и φ_k^* получаются с помощью формулы (84):

$$\begin{aligned} \text{Var} \sqrt{G^*(\omega_k)} &= \frac{1 - C^*(\omega_k)}{4m} \cdot \frac{f_x^*(\omega_k)}{f_z^*(\omega_k)}; \\ \text{Var} \varphi^*(\omega_k) &= \frac{\text{Var} \sqrt{G^*(\omega_k)}}{G^*(\omega_k)}. \end{aligned} \quad (86)$$

Только что найденные формулы применяются к оцениваемым величинам непосредственно с помощью периодограммы. Если исходить из величин $\hat{c}(\omega)$ и $\hat{q}(\omega)$, вычисленных по формулам (80) и (81), надо будет подставить вместо множителя $2m$ (который входит в оценку распределения $C^*(\omega)$ и в качестве знаменателя в формулы (84) и (86)) множитель, зависящий от применяемого окна. В частности, если употребляется окно Тьюки, можно использовать уже полученное в § 7(3) соответствие, т. е.

$$2m = \frac{4T}{3n} - 1, \quad (87)$$

где n — входящее в формулу (37) или (80) число, обозначающее число членов, которые берутся в коррелограммах, т. е. ширина окна.

5) Интерпретация передаточной функции

Оценку передаточной функции можно рассматривать как самостоятельную цель статистического анализа. Однако ее часто пытаются интерпретировать, т. е. дать ей аналитическое выражение, благодаря которому зависимость $\{x_t\}$ относительно $\{z_t\}$ описывается простой моделью. Несомненно, возможность последней операции составляет даже главное преимущество, которое эконометрист находит в спектральном анализе.

В самом деле, иллюстрированная соотношением (68) декомпозиция может оказаться удобным методом для описания зависимости между рядами z_t и x_t в каждой полосе частот. Изучение изменений T_k и \sum_k^2 от одной полосы к другой может привести к модели, в которую входит относительно малое число параметров. Такая модель описывает явление и иногда допускает его анализ параметрическими методами, которые будут главным предметом анализа в следующих трех главах.

Итак, иногда априори принимается, что зависимость x_t от z_t выражается моделью вида ¹:

$$x_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} z_{t-\tau} + \varepsilon_t, \quad (88)$$

где a_{τ} — постоянные числовые коэффициенты и ε_t — стационарный случайный процесс (мы придерживаемся здесь гипотезы о средних значениях x_t и z_t , равных нулю). В подобной модели, описывающей зависимости очень разнообразной формы, компоненты X_k и Z_k удовлетворяют соотношению:

$$X_k = T(\omega_k) Z_k + E_k, \quad (89)$$

¹ Интерпретация передаточных функций является простой лишь в том случае, когда априори можно уточнить направление причинности. Тогда $\{z_t\}$ определяет $\{x_t\}$ без обратной связи. Когда же явление предполагает взаимозависимости, как это часто наблюдается в эконометрии, становится необходимой относительно точная спецификация модели.

где E_k — компонента Фурье для ε_t и $T(\omega_k)$ — теоретическая передаточная функция

$$T(\omega) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} e^{i\omega\tau}. \quad (90)$$

(Зависимость (89) является лишь приближенной из-за крайних членов ряда z_t . Более того, можно заметить, что формула (90) дает передаточную функцию, которая сопряжена с определенной в гл. 11, § 5. Однако такая неопределенность, по-видимому, не будет создавать трудностей.)

Обратно, если определена эмпирическая передаточная функция $T^*(\omega)$ и функция $\Sigma^*(\omega)$, описывающая изменение амплитуды E_k от одной полосы частот к другой, обычно можно более строго уточнить последовательность коэффициентов a_{τ} и спектральные характеристики процесса ε_t .

Рассмотрим в качестве примера зависимость между занятостью (x_t) и производством (z_t) во французской текстильной промышленности. Рис. 13 представляет в своих трех частях величины, относящиеся соответственно к $\hat{G}(\omega)$, $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\hat{C}(\omega)$. Они получены с помощью тринадцати первых членов коррелограмм применением сглаживания, определенного¹ формулой (37). На двух верхних частях рисунка фигурируют пунктирные линии на расстоянии двух средних квадратических отклонений по обе стороны от $\hat{G}(\omega)$ и $\hat{\varphi}(\omega)$.

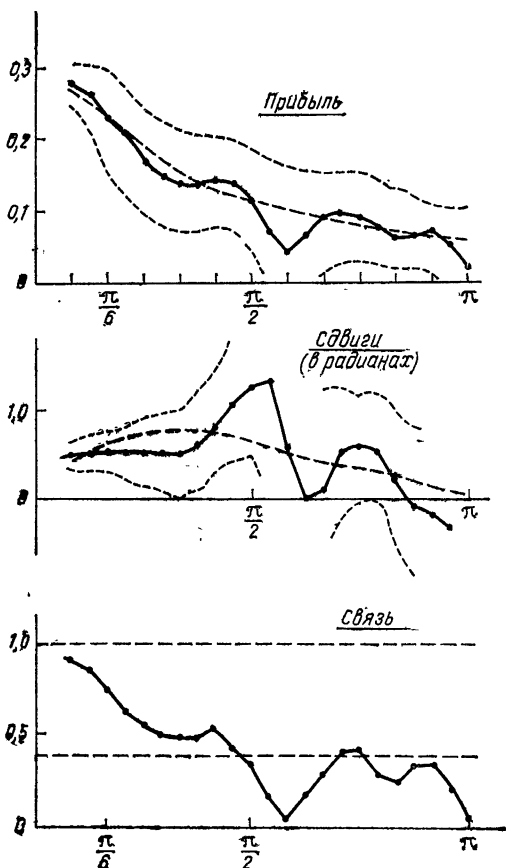


Рис. 13. Зависимость между занятостью и производством в текстильной промышленности Франции

схематически рисунка фигурируют пунктирные линии на расстоянии двух средних квадратических отклонений по обе стороны от $\hat{G}(\omega)$ и $\hat{\varphi}(\omega)$.

¹ Для устранения смещения в оценке спектров и коспектров два исходных ряда были предварительно отфильтрованы последовательным применением двух фильтров (39) и (42). Эта операция пропорционально изменяет величины всех спектров и коспектров, относящихся к одной и той же частоте. Таким образом, она не оставляет возможности для какой-либо коррекции в оценке передаточной функции и когерентности. Это можно видеть из формул (73) и (74).

Для этого применялись формулы, соответствующие (86) для $2m = 7$, соответственно тому, что дает (87) в этом случае. На рисунке, относящемся к когерентности, пунктиром отмечены значения, определяющие порог значимости при уровне 5% (стоит напомнить, что эти средние квадратические отклонения и уровни значимости получаются с помощью приближенных формул¹).

Можно констатировать, что когерентность значима для малых частот, но, вообще говоря, не для частот, соответствующих периоду, равному или меньшему 1 года. Модуль $\hat{G}(\omega)$ уменьшается достаточно регулярно с ω , а $\hat{\varphi}(\omega)$ стремится к положительному значению — по крайней мере для малых частот.

Это подсказывает модель вида (88):

$$a_{\tau} = ab^{\tau}, \quad (91)$$

где a и b — две положительные постоянные. В самом деле, пусть соответствующая функция $T(\omega)$ равна:

$$T(\omega) = a \sum_{\tau=0}^{\infty} b^{\tau} e^{i\omega\tau} = \frac{a}{1 - be^{i\omega}}, \quad (92)$$

откуда

$$G(\omega) = \frac{a^2}{1 - 2b \cos \omega + b^2}, \quad \varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{b \sin \omega}{1 - b \cos \omega}. \quad (93)$$

Эти функции хорошо соответствуют полученным в действительности. На рис. 13 штриховой линией изображена эволюция $G(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при $a = 0,121$ и $b = 0,7$. Согласие является вполне удовлетворительным.

Заметим еще, что формулу (83) можно записать в виде:

$$f_{\varepsilon}^*(\omega_k) = \left(1 + \frac{1}{2m}\right) [1 - C^*(\omega_k)] \times f_x^*(\omega_k), \quad (94)$$

так как $\Sigma_k^{*2}/2\pi$ можно рассматривать как мало смещенную оценку для $f_{\varepsilon}(\omega_k)$, спектральной плотности ε_t . (Смещение равно нулю, если $f_{\varepsilon}(\omega)$ будет в точности равно постоянной величине в полосе частот, относящейся к ω_k .)

В интересующем нас примере (допуская, что модель (88) применяется к отклонениям от исходных рядов относительно их соответствующих тенденций) мы замечаем, что спектральная плотность для ε_t

Исходный ряд занятости сдвинут на полтора месяца относительно ряда производства (занятость в первый день квартала — производство в течение предыдущего квартала). Вследствие устранения этого сдвига при вычислении $\hat{\varphi}(\omega)$ появилась удобная для интерпретации величина.

¹ Другое применение читатель найдет у Э. Кине [251 гл. 6, разд. 3, 4], где изучаются зависимости между производством, списком заказов и запасами во французском производстве картона. Спектральный анализ использует месячные ряды за период январь 1948 — июнь 1965 гг.

сильно меняется. Для занятости она в 400 раз больше в $\pi/8$, чем в $\pi/2$. Для ошибки ε_i она все еще в 100 раз больше в $\pi/8$, чем в $\pi/2$ (так как $1 - C^*(\omega)$ в 4 раза меньше). Это сильное изменение спектральной плотности является следствием большой зависимости между ошибками ε_i для последовательных кварталов.

6) Спектральные множественные регрессии

Когда заранее известно, что ряд $\{x_i\}$ зависит от двух или нескольких рядов $\{z_{jt}\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), нельзя, очевидно, ограничиться изучением его зависимости от каждого ряда $\{z_{jt}\}$, взятого изолированно. Это не создает принципиальных трудностей, но приводит к заметно более сложным формулам. Как и в случае обычных множественных регрессий, их необходимо вводить все одновременно.

Рассмотрим случай с двумя рядами $\{z_{1t}\}$ и $\{z_{2t}\}$. Модель (68) заменим следующей:

$$X_{k+h} = T_{1k} Z_{1, k+h} + T_{2k} Z_{2, k+h} + E_{k+h}. \quad (95)$$

С помощью тех же доводов, что и в разделе 2), можно установить, что минимум суммы S_k произведений $(X_{k+h} - T_{1k} Z_{1, k+h} - T_{2k} Z_{2, k+h})$ на их сопряженные значения есть минимум для T_{1k}^* и T_{2k}^* , определенных равенством:

$$\begin{bmatrix} T_{1k}^* \\ T_{2k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Z_{1, k+h} \bar{Z}_{1, k+h} & \sum Z_{2, k+h} \bar{Z}_{1, k+h} \\ \sum Z_{1, k+h} \bar{Z}_{2, k+h} & \sum Z_{2, k+h} \bar{Z}_{2, k+h} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum X_{k+h} \bar{Z}_{1, k+h} \\ \sum X_{k+h} \bar{Z}_{2, k+h} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

где все суммы берутся для h , меняющегося от $-m$ до m .

Определим комплексные величины:

$$4\pi(2m+1)f_{xj}^*(\omega_k) = \sum_{h=-m}^m X_{k+h} \bar{Z}_{j, k+h}, \quad j=1, 2;$$

$$4\pi(2m+1)f_{ij}^*(\omega_k) = \sum_{h=-m}^m Z_{i, k+h} \bar{Z}_{j, k+h}, \quad i, j=1, 2.$$

Заметим, что $f_{ij}^*(\omega)$ есть спектральная плотность ряда $\{z_{jt}\}$, а $f_{ij}^*(\omega)$ можно записать в форме: $c_{ij}^*(\omega) - iq_{ij}^*(\omega)$, где функции $c_{ij}^*(\omega)$ и $q_{ij}^*(\omega)$ обозначают соответственно коспектр и квадратуру спектра $\{z_{it}\}$ и $\{z_{jt}\}$. С точностью до множителя $[4\pi(2m+1)]^2$ определитель квадратной матрицы в уравнении (96) равен: $f_{11}^*(\omega_k) f_{22}^*(\omega_k) [1 - C_{12}^*(\omega_k)]$, где функция $C_{12}^*(\omega_k)$ обозначает когерентность $\{z_{1t}\}$ и $\{z_{2t}\}$. Тогда легко вычисляем, например,

$$T_{1k}^* = \frac{[f_{22}^* c_{x1}^* - c_{12}^* c_{x2}^* + q_{12}^* q_{x2}^*] - i[f_{22}^* q_{x1}^* - c_{12}^* q_{x2}^* - q_{12}^* c_{x2}^*]}{f_{11}^* f_{22}^* [1 - C_{12}^*]}. \quad (97)$$

В целях упрощения в этой формуле опущены аргументы ω_k . Действительные и мнимые части T_{1k}^* видны непосредственно.

Для изучения точности полученных оценок можно применить методы, аналогичные использованным ранее.

ГЛАВА 13. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ОШИБКАМИ В МОДЕЛЯХ РЕГРЕССИИ

1. Взаимозависимость ошибок

Для оценки коэффициентов линейной модели с ошибками в уравнениях мы ввели гипотезу независимости ошибок ε_t и ε_θ для двух различных наблюдений t и θ (гипотеза 1 гл. 6). Теперь следует задаться вопросом относительно границ применимости этой гипотезы.

В самом деле, при оценке модели с помощью временного ряда для переменных x_{it} и z_{jt} часто можно констатировать более или менее существенную случайную зависимость между последовательными ошибками $\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots$

Это, впрочем, не удивительно. Ошибки формализуют влияние факторов, которые в модели не учитываются явно либо из-за невозможности их наблюдать непосредственно, либо потому, что по отдельности они слишком не существенны, или нам неизвестна их роль в изучаемом явлении. Как все экономические величины, эти факторы испытывают эволюцию, обычно более регулярную, чем чисто случайный ряд. Если их эффект ε_t положителен для наблюдения t , то вероятнее, что он будет также положителен для наблюдения $t + 1$.

Может случиться также, что ошибки измерения переменных отражают искусственную зависимость, так как они часто сходным образом влияют на два последовательных наблюдения. Аналогично, если действительная зависимость между эндогенными и экзогенными переменными не является в точности линейной, то линейное выравнивание выявит дополнительные отклонения, которые чаще всего будут близки для двух последовательных наблюдений, так как экзогенные переменные испытывают обычно медленные изменения.

Зависимость ошибок часто бывает заметна и при использовании годовых данных. Она становится еще более существенной при выравнивании модели по квартальным или месячным статистическим рядам. А улучшение статистической информации позволяет чаще прибегать к данным такого типа. Прежде чем явно учитывать корреляции последовательных значений ε_t , следует заметить, что слишком сильная временная зависимость между ошибками часто указывает на несовер-

шенство используемой модели. По-видимому, она не учитывает некоторые важные факторы. Их следует найти и ввести явным образом, поскольку неполная модель может привести к неточным интерпретациям.

Из теорем гл. 6 известно, что применение метода наименьших квадратов не дает систематического смещения в оценке параметров даже когда ошибки зависимы. Однако при этом метод наименьших квадратов не является наиболее эффективным и становятся неприменимыми обычные формулы для стандартных отклонений.

В последующих параграфах будут изучены критерии независимости ошибок, асимптотическое распределение оценок, формулы пригодные для вычисления средних квадратических отклонений в случае зависимых ошибок, эффективность метода наименьших квадратов и другие методы оценки.

В этой главе будут рассматриваться линейные модели вида:

$$x_t = a'z_t + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что модель содержит лишь одну эндогенную переменную, и что *запаздывающие значения x_{t-9} этой эндогенной переменной не входят в оцениваемую зависимость*. Исключительно в целях упрощения изложения мы исключаем модели с несколькими уравнениями. Как показал А. Цельнер в своей интересной работе [342], обобщения производятся достаточно непосредственно.

Напротив, наличие запаздывающих значений эндогенной переменной влияет на все результаты. До сих пор всегда предполагалось, что z_{jt} истинные экзогенные переменные, в связи с чем не рассматривались уравнения, в которых фигурируют запаздывающие величины x_{t-9} . Это ограничение, причины которого будут рассмотрены в следующей главе, приобретает здесь особое значение.

Мы примем здесь, что ошибки ε_t следуют эргодическому стационарному процессу и что их математическое ожидание равно нулю при любых значениях экзогенных переменных z_{jt} . Мы воспользуемся стационарностью и эргодичностью при обсуждении асимптотических свойств; они не представляют существенных ограничений для анализа в условиях малых выборок.

Существование корреляции между ε_t , относящимися к различным наблюдениям, не противоречит гипотезам гл. 5, в которой изложена теория линейного выравнивания. В самом деле, модель регрессии (1) сводится к общей линейной модели для вектора x с компонентами x_1, x_2, \dots, x_T , с недиагональной матрицей Q для ковариаций вектора ошибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$.

Геометрический метод гл. 5 применим как для изучения зависимости ошибок в малых выборках, так и для анализа гетероскедастичности. Однако мы будем придерживаться здесь аналитического изложения и формулировать многие результаты, не приводя их доказательств. В статье Г. Уотсона [315], посвященной теории малых выборок, можно найти как различные дополнения, так и объяснение геометрической природы некоторых свойств.

2. Критерии независимости ошибок

Первая теорема состоит в определении критериев независимости, которые позволят обнаружить зависимость между ошибками в том случае, когда она значима.

Как это делается обычно, мы ограничимся изучением уровней значимости критериев, которые интуитивно представляются достаточно эффективными для обнаружения зависимости между ε_t и некоторыми $\varepsilon_{t-\theta}$, предшествующими ε_t . Таким образом, достаточно изучить распределение этих критериев в случае независимых ошибок. Если бы ошибки, влияющие на экономическую модель типа (1), можно было наблюдать непосредственно, то можно было бы применить критерии, изложенные в начале предыдущей главы. Однако ошибки остаются неизвестными, а нам доступны лишь эмпирические остатки.

С помощью наименьших квадратов эти остатки можно получить в виде:

$$\varepsilon_t^* = \varepsilon_t + (a - a^*)'z_t, \quad (2)$$

где

$$a^* - a = [M_{zz}]^{-1} m_{ze}. \quad (3)$$

Однако известно, что a^* стремится к a при неограниченном возрастании числа наблюдений (см. теорему 3 и предложение 5, гл. 6). Остатки ε_t^* стремятся тогда к ошибкам ε_t . Методы гл. 12 применимы, таким образом, для больших выборок.

Различные непараметрические критерии могут применяться к последовательности остатков по крайней мере, если число наблюдений не очень мало. Уровни значимости, даваемые теоретическими распределениями, безусловно, неточны, так как они относятся к критериям, установленным для последовательности ошибок. Однако вычисления производятся очень быстро и выявляют наиболее очевидные случаи зависимости ошибок. Так, например, полезную информацию можно получить, применяя критерий Свед и Айзенхарта для остатков, получаемых с помощью графического представления результатов регрессии (см., например, нижнюю часть рис. 1, гл. 6).

Разумеется, для малых выборок этот способ является лишь приближением. Важно определить точные критерии, применимые к регрессиям даже для коротких рядов. Согласно формулам (2) и (3) последовательность остатков зависит не только от последовательности ошибок, но и от последовательностей значений экзогенных переменных z_{jt} . Таким образом, не существует критериев, которые можно точным образом применить к остаткам, независимо от значений z_{jt} . Однако Дж. Дарбин и Г. Уотсон [85] построили таблицы, дающие нижние и верхние пределы порогов значимости для критерия фон Неймана. Эти таблицы достаточны для большинства конкретных ситуаций. Ниже приводится выдержка из них. Прежде чем мы укажем способ их использования, рассмотрим логические основания критерия.

$$d = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (\varepsilon_{t+1}^* - \varepsilon_t^*)^2}{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^{*2}} \quad (4)$$

представляет «отношение фон Неймана», примененное к остаткам оценки. Этот критерий имеет эффективность, аналогичную таковой для критерия r_1 , первого коэффициента автокорреляции остатков. Из предыдущей главы известно, что этот критерий будет особенно мощным, если ошибки следуют авторегрессионному процессу первого порядка. Таким образом, он, по-видимому, хорошо приспособлен для экономических моделей. (Мощность критерия очень подробно изучена в [85].)

Значение d в выборке зависит одновременно от последовательности z_t и от значений ε_t (для $t = 1, 2, \dots, T$). Однако Дарбин и Уотсон показали, что для заданных

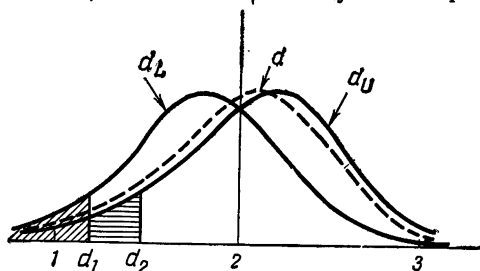


Рис. 1

значений ε_t значение d обязательно заключено между двумя границами d_L и d_U , не зависящими от значений, принимаемых z_t , и являющимися функциями лишь чисел T и m , именно

$$d_L \leq d \leq d_U.$$

Для некоторых значений последовательности z_t границы d_U и d_L могут достигаться. Интервал $[d_L, d_U]$ является, следовательно, наименьшим из возможных, если не принимать во внимание точные значения экзогенных переменных.

Границы d_L и d_U представляют случайные величины, распределение которых можно определить для каждой пары чисел (T, m) с помощью точных гипотез относительно распределения ε_t . Дарбин и Уотсон, естественно, сохранили гипотезы 1 и 3 гл. 6: нормальность, гомоскедастичность и независимость последовательных ошибок. Они определили плотность распределения вероятностей для d_L и d_U и табулировали значения d_1 и d_2 , доверительных границ d_L и d_U для некоторых уровней значимости α (например, 5%).

На рис. 1 представлено определение этих границ d_1 и d_2 . Сплошными линиями проведены репрезентативные кривые плотностей вероятности для d_L и d_U . Эти кривые симметричны относительно вертикали с абсциссой 2. Пунктиром проведена кривая, представляющая плотность d для гипотетического ряда z_t .

Предположим, например, что необходимо проверить гипотезу независимости ошибок против гипотезы прямой зависимости, которая выражается малым значением d . Для этого надо исследовать, будет ли

значение d^* , полученное для d , особенно малым в случае независимости, т. е. определить доверительную границу как абсциссу, определяющую левую часть кривой плотности для уровня значимости α . Так получаются значения d_1 и d_2 , соответствующие d_L и d_U .

Табл. 1 дает значения d_1 и d_2 для $\alpha = 5\%$ и для различных значений T и m' — истинного числа экзогенных переменных регрессии (исключая константу)¹. Значительно более полные таблицы приводятся в статье Дарбина и Уотсона.

Т а б л и ц а 1

Распределение критерия Дарбина — Уотсона

T	$m' = 1$		$m' = 2$		$m' = 3$		$m' = 4$		$m' = 5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Таблица дает значения d_1 и d_2 как функции от m' (полное число экзогенных переменных, исключая вспомогательную константу) и от T (число наблюдений) для уровня значимости 5% (для критерия против единственной альтернативы положительной авторегрессии).

Для практического использования таблицы полученное значение d^* следует сравнить с d_1 и d_2 .

а) Если $d^* < d_1$, то вероятность столь малого значения наверняка меньше α . Гипотеза независимости отбрасывается².

б) Если $d^* > d_2$, то вероятность столь малого значения наверняка больше α . Гипотеза независимости не отбрасывается.

в) Если $d_1 \leq d^* \leq d_2$, то приведенные таблицы оставляют вопрос открытым. Возможно, что гипотезу независимости при уровне значимости α следует отбросить. Однако этого нельзя узнать без изучения закона распределения вероятностей d для последовательности экзогенных переменных z_t . Практически в этом случае часто довольствуются указанием на то, что значение d^* попадает в область неопределенности критерия.

В настоящее время принято приводить значение d^* вместе с регрессиями для временных рядов и указывать на расположение этого

¹ Если модель не содержит свободного члена, то применение критерия не должно базироваться на вычислении остатков регрессии без свободного члена. При этом необходимо вычислить остатки вспомогательной регрессии по переменным к тем же экзогенным переменным, но уже со свободным членом.

² Это предполагает, что ε_t следует нормальному распределению. Однако изучение для близких критериев показывает, что уровни значимости мало чувствительны к небольшим отклонениям от нормальности.

значения относительно d_1 и d_2 . Так, для примера, рассмотренного в гл. 6, § 5, соотношение представляется в форме:

$$x_t = 0,132z_{1t} + 0,550z_{2t} + 2,10z_{4t} - 5,92 \quad d^* = 1, 20. \\ (0,006) \quad (0,110) \quad (0,20) \quad (1,27)$$

Здесь d^* попадает в зону неопределенности, соответствующую 18 наблюдениям, трем экзогенным переменным и уровню значимости 5%. Таким образом, только этих вычислений недостаточно для отклонений гипотезы независимости.

Хотя обычно точное значение уровня значимости d не определяется, можно приближенно указать его положение в интервале $[d_1, d_2]$.

В самом деле, доказательства Дарбина и Уотсона показывают, что d близко к d_U , если последовательности z_{jt} являются приближенно линейными комбинациями постоянной величины и синусоидальных последовательностей с длинными периодами, точнее, с периодами, равными $2T, T, 2T/3, \dots, 2T/(m-1)$. Наоборот, d близко к d_L , если z_{jt} являются приближенно линейными комбинациями некоторой постоянной и синусоидальных последовательностей с короткими периодами: $2T/(T-1), 2T/(T-2), \dots, 2T/(T-m+1)$. Чаще всего последовательности экзогенных переменных представляют медленную эволюцию, так что d близко к d_U . Итак, в эконометрических исследованиях значение d , заключенное в интервале $[d_1, d_2]$, чаще всего свидетельствует о значительной зависимости ошибок.

До сих пор предполагалось, что независимость ошибок проверяется при гипотезе о наличии положительной связи. Иногда оказывается, что в той же роли выступает гипотеза о наличии отрицательной связи. Так, в некоторых случаях применяют метод наименьших квадратов не к самим последовательностям x_t и z_t , а к последовательностям первых конечных разностей

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} \text{ и } \Delta z_t.$$

Классические статистические методы применимы тогда в той мере, в какой модель можно записать в виде:

$$\Delta x_t = a' \Delta z_t + \eta_t,$$

где η_t независимы. Однако отрицательная зависимость между η_t существует, если ε_t в формуле $x_t = a' z_t + \varepsilon_t$ независимы или слабо связаны.

Критерий Дарбина — Уотсона легко применяется для проверки гипотезы о независимости. При этом возникает вопрос, не будет ли в случае независимости значение d^* слишком велико, т. е. не будет ли значение $4 - d^*$ слишком малым. Как видно из симметрии рис. 1, плотности распределения вероятностей для $4 - d_L$ и $4 - d_U$ соответственно равны таковым для d_L и d_U . Следовательно, порог доверия для $4 - d^*$ содержится между d_1 и d_2 . Таким образом, для проверки независимости достаточно рассмотреть положение $4 - d^*$ относительно d_1 и d_2 .

Аналогично, в случае необходимости, таблицы Дарбина — Уотсона дают двусторонние критерии, если альтернативная гипотеза обуславливает положительную или отрицательную зависимость ошибок ¹.

Критерий Дарбина — Уотсона мощен по отношению к зависимости ошибок, представленной авторегрессионным процессом первого порядка для $\{e_t\}$. Действительная зависимость может быть более сложной, например, при анализе месячных или квартальных рядов.

В гл. 12, § 5 изучались критерии независимости применительно к периодограмме. Они годны для выявления зависимостей, соответствующих менее простой коррелограмме, чем коррелограмма авторегрессионного процесса первого порядка. Можно полагать, что те же критерии применимы для эмпирических остатков.

Дарбин [84] рассматривает, в частности, кумулятивную периодограмму остатков:

$$S_k^* = \frac{\sum_{h=1}^k I_h^*}{\sum_{h=1}^{T''} I_h^*}; \quad k = 1, 2, \dots, T'', \quad (5)$$

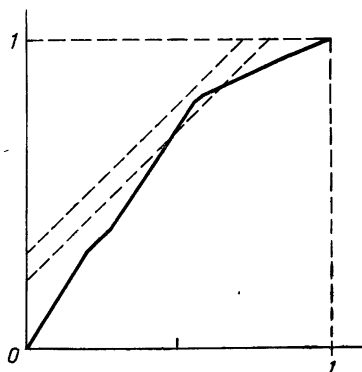


Рис. 2

где $T'' = T/2 - 1$, если T четно, $T'' = (T - 1)/2$, если T нечетно, и T есть периодограмма остатков для частоты $2\pi h/T$ (см. формулы (11), (14) и (20) гл. 12). При наличии прямой зависимости ошибок эта периодограмма часто описывает линию, расположенную выше диагонали квадрата, в котором она начерчена, при этом k/T'' нанесено по оси абсцисс, а S_k^* — по оси ординат (см. рис. 2).

В гл. 12 указывалось, что если S_k^* вычислялось для самих ошибок e_t , то критерий независимости получается из сравнения S^+ , максимума вертикального расстояния от диагонали до линии, с границей C_0 , значение которой давалось для уровня значимости 5% и некоторых величин T'' .

Хотя распределение S_k^* зависит от значений z_{jt} , то же рассуждение, которое применялось для критерия Дарбина — Уотсона, показывает, что это распределение можно окаймить двумя другими, независимыми от него. Дж. Дарбин установил следующие закономерности.

¹ Дж. Дарбин [76] показал, как представленный здесь критерий применяется к зависимости ошибок уравнения, принадлежащего к модели с многими уравнениями типа, изученного в пятой части (см. в особенности гл. 19 и 20). Если модель содержит m экзогенных переменных, среди которых вспомогательная переменная всегда равна 1, и если рассматриваемое уравнение выравнено с помощью метода Комиссии Коулса, то Дж. Дарбин предлагает вычислять e_t^* , как в формуле (4), с помощью остатков уравнения и применять критерий с использованием таблиц для моделей с одним уравнением (с $m' = m - 1$).

а) Если по крайней мере для одного значения k наблюдается соотношение:

$$S_k^* > C_0 + \frac{2k}{T-m},$$

то в случае независимости вероятность этой ситуации наверняка меньше 5%. Таким образом, гипотеза отбрасывается в пользу гипотезы прямой зависимости.

б) Если

$$S_k^* \leq C_0 + \frac{2k-m+1}{T-m}$$

для любого k , то вероятность этой ситуации в случае независимости не меньше 5%. Гипотеза принимается (по крайней мере предварительно).

На графике, аналогичном графику рис. 2, правые члены приведенных выше неравенств можно изобразить двумя параллельными прямыми, несколько более наклонными, чем диагональ квадрата. Критерий не позволяет обнаружить область, в которой линия, проведенная через S_k^* , пересекает нижнюю прямую, но остается под верхней прямой.

Применение этого критерия, как и критерия Дарбина — Уотсона, оставляет сомнения в некоторых случаях. Поскольку регрессии чаще всего вычисляются относительно переменных, представляющих медленные изменения, то можно подозревать, что сомнительные случаи соответствуют в действительности ситуациям, в которых гипотезу независимости следует отбросить. (Ее необходимо отбросить, если экзогенные переменные будут линейными комбинациями некоторой постоянной и синусоидальных последовательностей с периодами $T, T/2, T/3, \dots, T/(m-1)$.)

Ограничительным является тот факт, что обычные методы не позволяют делать каких-либо заключений в тех практически важных случаях, когда в принципе следует определить точное распределение, которое очень неудобно вычислять даже с помощью приближений (относительно вычисления этих приближений см. [144]). Поэтому разрабатывались другие методы, свободные от этого недостатка. Так, пытались определить величины, которые корректно устанавливают зависимость ошибок, но имеют распределения, не зависящие от значений экзогенных переменных. Были предложены два близких способа, но они оба приводят к довольно громоздким вычислениям.

Согласно предложению Г. Тейла, развитому Дж. Кертсом и А. Абрамсом, с помощью линейного преобразования наблюдений можно вычислить вектор с $T-m$ некоррелированными компонентами $\hat{\varepsilon}_t$, имеющими одинаковые дисперсии в случае гомоскедастичности и независимости ненаблюдаемых ошибок ε_t . (Величины $\hat{\varepsilon}_t$, полученные с помощью линейного преобразования, будут иметь нормальное распределение, если его имеют ε_t .) После этого можно применить к $\hat{\varepsilon}_t$ критерии независимости, представленные в § 3—5, гл. 12 (см., например, [292]

и [1], где приведены формулы, которые с помощью M_{zz} определяют линейное преобразование для перехода от x_t к \hat{e}_t). Дж. Дарбин [83] предложил определить вектор \tilde{e} , имеющий T компонент \tilde{e}_t и следующий тому же распределению, что и вектор остатков регрессии e_t относительно вспомогательных переменных, удобных для применения критериев (например, экзогенных переменных, к которым применима та или другая граница зоны неопределенности).

Предположим, таким образом, что z_{jt} медленно изменяется и что z_{mt} постоянная. Попробуем применить верхнюю границу d_2 критерия Дарбина — Уотсона для e_t . Определим вспомогательные переменные w_{jt} равенствами:

$$w_{jt} = \cos \frac{(2t-1)j\pi}{2T}; \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (6)$$

Дарбин доказывает, что можно проверить гипотезу независимости с помощью следующих вычислений, полностью применимых при нормальном распределении e_t :

1) Оценивается множественная регрессия для x_t относительно z_{jt} и w_{jt} (при наличии точной коллинеарности надо уменьшить число вспомогательных экзогенных переменных). Пусть \hat{a}_j и \hat{b}_j — коэффициенты регрессии, полученные соответственно для z_{jt} и w_{jt} ; G_1 — ковариационная матрица, оцененная для первых $m-1$ значений \hat{a}_j и G_2 — ковариационная матрица \hat{b}_j ; пусть \hat{e}_t — остатки.

2) Вычисляются треугольные матрицы P_1 и P_2 , такие, что $P_1 P_1' = G_1$ и $P_2 P_2' = G_2$; вычисляется $P_2^{-1} = Q_2$. Для триангуляции можно применить следующие формулы:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sqrt{g_{11}}; \quad p_{j1} = g_{j1}/p_{11}; \quad j = 1, 2, \dots, m-1; \\ p_{22} &= \sqrt{g_{22} - p_{21}^2}; \quad p_{j2} = (g_{j2} - p_{21} p_{j1})/p_{22}; \\ p_{33} &= \sqrt{g_{33} - p_{31}^2 - p_{32}^2}; \quad p_{j3} = (g_{j3} - p_{31} p_{j1} - p_{32} p_{j2})/p_{33} \end{aligned}$$

и т. д., а для вычисления матрицы, обратной треугольной матрице:

$$\begin{aligned} q_{11} &= 1/p_{11}; \\ q_{21} &= -p_{21} q_{11}/p_{22}; \quad q_{22} = 1/p_{22}; \\ q_{31} &= -(p_{31} q_{11} + p_{32} q_{21})/p_{33}; \quad q_{32} = -p_{32} q_{22}/p_{33} \end{aligned}$$

и т. д.

3) Вычисляется матрица N^* остатков для $m-1$ первых переменных z_{jt} в регрессиях относительно w_{jt} и $z_{mt} = 1$.

4) Вычисляется:

$$\tilde{e}_t = \hat{e}_t + N^* P_1 Q_2 \hat{b},$$

где \hat{b} — вектор с компонентами \hat{b}_j .

5) Вычисляется \tilde{d} по формуле (4) для \tilde{e}_t и гипотеза независимости отбрасывается, если \tilde{d} меньше d_2 с $m' = m-1$.

В качестве примера эти вычисления были произведены для регрессии, относящейся к импорту во Францию в период 1949—1966 гг. Значение \tilde{d} оказалось равным 1,71. Оно практически равно границе $\hat{d}_2 = 1,70$, которая применяется при $T = 18$, $m' = 3$ и 5%-ном уровне значимости.

3. Асимптотические свойства регрессий

Модели вида

$$x_t = a'z_t + \varepsilon_t$$

выравниваются чаще всего методом наименьших квадратов, даже в том случае, когда случайные ошибки подвержены некоторой зависимости. Поэтому необходимо изучить свойства оценок и применяемых критериев для тех ситуаций, когда гипотеза независимости ошибок не выполняется. Здесь всегда будет приниматься, что $E(\varepsilon_t) = 0$ при любых значениях экзогенных переменных z_{jt} и что процесс ошибок стационарен. Последнее означает выполнение свойства гомоскедастичности.

Лемма 1, гл. 5 применима при наличии зависимости ошибок. Она устанавливает, что оценка a^* , полученная выравниванием по методу наименьших квадратов, имеет математическое ожидание, равное a , и ее распределение нормально, когда нормально распределение ε_t . Так же можно обобщить результаты асимптотического анализа в § 8, гл. 6 относительно сходимости a^* к истинному значению a и сходимости закона распределения величины

$$\sqrt{T}(a^* - a)$$

к нормальному закону; при этом не делается предположения о нормальности для ε_t .

Это обобщение содержит некоторые тонкости. Сходимость и асимптотическая нормальность предполагают, что удовлетворяются некоторые условия для процесса ε_t и для последовательности z_t .

Чтобы выявить природу этих свойств и показать необходимый при этом вид условий, мы изучим один простой случай¹.

Рассмотрим модель

$$x_t = a'z_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

и предположим, что ε_t подчиняются авторегрессионному процессу:

$$\varepsilon_t = \gamma\varepsilon_{t-1} + \eta_t, \quad (7)$$

где γ постоянная, меньшая 1 по абсолютной величине, и $\{\eta_t\}$ — чисто случайный процесс с конечной дисперсией σ_η^2 . Соотношение (7) можно также записать в виде:

$$\varepsilon_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \gamma^\tau \eta_{t-\tau}.$$

¹ В статье У. Гренэндера [126] читатель найдет общее доказательство сходимости a^* в среднеквадратическом к a для ошибок, представляемых процессом с непрерывной, всегда положительной спектральной плотностью и таким, что последовательность z_t удовлетворяет условиям предложения 5, гл. 6.

Кроме того, j -я компонента оценки по методу наименьших квадратов a^* для a записывается в виде:

$$a_j^* = a_j + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t^T \varepsilon_t,$$

где λ_t^T есть j -я компонента вектора $z_t^T M_{zz}^{-1}$. Положим:

$$d = \sqrt{T} (a_j^* - a_j).$$

Это выражение можно еще записать как

$$d = d_1 + d_2$$

с двумя зависимыми членами d_1 и d_2 , равными соответственно

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\tau=-\infty}^0 \sum_{t=1}^T \lambda_t^T \gamma^{t-\tau} \eta_\tau; \quad (8)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\tau=1}^T \sum_{t=\tau}^T \lambda_t^T \gamma^{t-\tau} \eta_\tau. \quad (9)$$

Рассмотрим вначале первый член d_1 . Его дисперсия равна:

$$\text{Var}(d_1) = \frac{\sigma_\eta^2}{T(1-\gamma^2)} \left[\sum_{t=1}^T \lambda_t^T \gamma^t \right]^2. \quad (10)$$

Она стремится к нулю при неограниченном возрастании T , если сумма в скобках остается ограниченной по абсолютной величине. Этому условию можно удовлетворить, предположив простые гипотезы относительно последовательности z_t . Достаточно, например, как это предполагалось в гл. 6, чтобы матрица M_{zz} стремилась к невырожденному пределу. Член d_1 стремится тогда по вероятности к нулю, и асимптотическое распределение d совпадает с распределением d_2 , если оно существует.

d_2 можно записать в виде:

$$d_2 = \sum_{\tau=1}^T a_{\tau T} \eta_\tau, \quad (11)$$

где

$$a_{\tau T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=\tau}^T \lambda_t^T \gamma^{t-\tau}. \quad (12)$$

Непосредственно вычисляется:

$$\text{Var}(d_2) = \sigma_\eta^2 \alpha_T^2, \quad (14)$$

где α_T^2 определяется равенством:

$$\alpha_T^2 = \sum_{\tau=1}^T a_{\tau T}^2. \quad (15)$$

Предельное поведение d_2 зависит от закона распределения вероятностей η_t и свойств последовательности $a_{\tau T}$. Сходимость по вероятности

d_2/\sqrt{T} к нулю и сходимость a_j^* к a_j будут установлены, если удастся показать, что α_T^2 ограничено. В частности, если z_t ограничены и если M_{zz} стремится к невырожденному пределу, то $|\lambda_t^T|$ ограничено числом $\hat{\lambda}$, не зависящим от t и T . Отсюда, как легко проверить, следует, что

$$\alpha_T^2 \leq \frac{\hat{\lambda}^2}{(1-|\gamma|)^2}.$$

Оценка a^* стремится тогда по вероятности к истинному значению a .

Асимптотическая нормальность требует достаточно строгих условий. Чтобы ее установить, следует использовать общие результаты, имеющие тот же характер, что и следствия 1 и 2 приложения к гл. 6. Если $|\lambda_t^T|$ ограничено, то $|\sqrt{T}| a_{\tau T}|$ также ограничено. В силу следствия 1 достаточно тогда выяснить, стремится ли α_T^2 к конечному, не равному нулю, пределу α_∞^2 . Для этого нужно, чтобы эволюция последовательности z_t была в некотором смысле регулярной. Это условие может казаться естественным при теоретическом изучении свойств, которыми обладают выборки с конечным, хотя бы и большим, числом наблюдений.

4. Процессы ошибок и характеристики остатков

Процесс ошибок непосредственно не наблюдаем. Зато известны остатки после выравнивания по методу наименьших квадратов. Важно поэтому знать, какие сведения характеристики остатков могут дать относительно свойств процесса ошибок. Мы уже встречались с этим вопросом в связи с критерием независимости. Теперь нужно вернуться к нему для более систематического изучения.

Остатки связаны с ошибками посредством уравнений:

$$\varepsilon_t^* = \varepsilon_t + (a - a^*)' z_t \quad (2)$$

и

$$a^* - a = [M_{zz}]^{-1} m_{ze}. \quad (3)$$

При условиях, которые уточнены выше, оценка a^* стремится по вероятности к истинному значению, и, следовательно, остаток ε_t^* стремится к ошибке ε_t . Рассмотренные в гл. 12 методы оценки применимы поэтому для больших выборок. К сожалению, эконометрики часто располагают лишь малыми выборками. Отсюда возникает необходимость изучения характеристик, вычисленных для ε_t^* .

Пусть даны коэффициенты автоковариаций:

$$\gamma_\tau = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau}) \quad (16)$$

и их эмпирические эквиваленты, вычисленные для остатков:

$$C_\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} \varepsilon_t^* \varepsilon_{t+\tau}^*; \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Определим еще

$$M_{zz}^{\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t z'_{t+\tau}; \quad \tau = 1, 0, 2, \dots \quad (18)$$

$$\text{и} \quad R_{\tau} = [M_{zz}]^{-1} M_{zz}^{\tau}. \quad (19)$$

Примем условие:

$$M_{zz}^{-\tau} = M_{zz}^{\tau}; \quad R_{-\tau} = R_{\tau}.$$

R_{τ} появляются в некотором смысле как матрицы автокорреляции, относящиеся к T векторам экзогенных переменных z_t ¹.

Учитывая соотношения (2) и (3) в определении (17), получим:

$$C_{\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau} - m_{\varepsilon z} [M_{zz}]^{-1} m_{z\varepsilon}^{\tau} - m_{\varepsilon z} [M_{zz}]^{-1} m_{z\varepsilon}^{-\tau} + \\ + m_{\varepsilon z} [M_{zz}]^{-1} M_{zz}^{\tau} [M_{zz}]^{-1} m_{z\varepsilon} \quad (20)$$

с векторами:

$$m_{z\varepsilon}^{\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t \varepsilon_{t+\tau} \quad \text{и} \quad m_{z\varepsilon}^{-\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_{t+\tau} \varepsilon_t.$$

Во втором члене (20) математическое ожидание первого слагаемого равно γ_{τ} . Математическое ожидание трех следующих слагаемых представляет систематическую ошибку при оценке γ_{τ} с помощью C_{τ} .

Эти три слагаемых изучаются аналогично. Рассмотрим лишь первое. Можно записать:

$$E \{m_{\varepsilon z} [M_{zz}]^{-1} m_{z\varepsilon}^{\tau}\} = E \operatorname{tr} \{[M_{zz}]^{-1} \{m_{z\varepsilon}^{\tau} m_{\varepsilon z}\}\} = \operatorname{tr} \{[M_{zz}]^{-1} E \{m_{z\varepsilon}^{\tau} m_{\varepsilon z}\}\}. \quad (21)$$

Но

$$m_{z\varepsilon}^{\tau} m_{\varepsilon z} = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T-\tau} \sum_{t'=1}^T z_t \varepsilon_{t+\tau} \varepsilon_{t'} z'_{t'} = \\ = \frac{1}{T^2} \sum_{\theta=1+\tau-T}^{T-1} \sum_t z_t \varepsilon_{t+\tau} \varepsilon_{t+\tau+\theta} z'_{t+\tau-\theta}.$$

В последней сумме t изменяется

$$\begin{array}{lll} \text{от } 1 & \text{до } T + \theta - \tau, & \text{если } 1 + \tau - T \leq \theta \leq 0, \\ \text{от } 1 & \text{до } T - \tau & , \quad \text{если } 0 \leq \theta \leq \tau, \\ \text{от } 1 + \theta - \tau & \text{до } T - \tau & , \quad \text{если } \tau \leq \theta \leq T - 1, \end{array}$$

как это видно на рис. 3.

¹ Полезно знать следующие численные результаты, которые получили Э. Амс и С. Рейтер [7]. Эти два автора рассмотрели сто годичных статистических рядов из двадцати пяти наблюдений для периода 1929—1953 гг., извлеченных случайным образом из статистических ежегодников США. В среднем пять первых коэффициентов автокорреляций оказались равными 0,84; 0,71; 0,60; 0,53; и 0,45 для исходных рядов; и 0,68; 0,38; 0,15; —0,03 и —0,01 для рядов с исключенной тенденцией. Эти результаты согласуются с результатами § 7, гл. 12 о «типичном спектре» экономических рядов.

Во всех случаях $E(\varepsilon_{t+\tau} \varepsilon_{t+\tau-\theta})$ равно γ_θ . Сумма

$$\sum_t z_t z_{t+\tau-\theta}$$

мало отличается от $TM_{zz}^{\tau-\theta}$. Теперь можно записать:

$$E[m_{ze}^\tau m_{ez}] \approx \frac{1}{T} \sum_{\theta=1+\tau-T}^{T-1} \gamma_\theta M_{zz}^{\tau-\theta},$$

причем приближение будет хорошим, лишь если $M_{zz}^{\tau-\theta}$ и аналогичные матрицы, полученные с помощью меньшего числа векторов z_t , стремятся достаточно быстро к нулю при возрастании $|\tau - \theta|$ или если $|\gamma_\theta|$ быстро стремятся к нулю при возрастании θ .

Учитывая (21) и (19), находим, что

$$\begin{aligned} E\{m_{ez}[M_{zz}]^{-1}m_{ze}^\tau\} &\approx \\ &\approx \frac{1}{T} \sum_{\theta=1+\tau-T}^{T-1} \gamma_\theta \text{tr}(R_\tau \theta). \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются для математических ожиданий двух последних членов (20). Наконец, математическое ожидание C_τ подчиняется соотношению:

$$E(C_\tau) \approx \gamma_\tau + \frac{1}{T} \sum_{\theta=1+\tau-T}^{T-1} \gamma_\theta [\text{tr}(R_\tau R_\theta) - 2 \text{tr}(R_{\tau-\theta})]. \quad (22)$$

Эта формула дает представление о систематической ошибке, которую содержит C_τ для малых выборок. Если R_τ вычислены, то C_τ можно подправить. Для этого из них вычитается значение, которое принимает второе слагаемое правого члена (22) после подстановки C_θ вместо γ_θ . Во всяком случае, следует заметить, что систематическая ошибка зависит одновременно от коррелограммы для ε_t и от вида эволюции последовательности векторов z_t , относящихся к экзогенным переменным (матриц R_τ).

В частности, рассмотрим среднее значение квадратов остатков:

$$C_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2.$$

Его математическое ожидание дается формулой (22), которая здесь принимает следующий вид:

$$E(C_0) \approx \sigma^2 \left[1 - \frac{m}{T} - \frac{2}{T} \sum_{\theta=1}^{T-1} \rho_\theta \text{tr}(R_\theta) \right]. \quad (23)$$

Если все коэффициенты автокорреляций ρ_θ равны нулю, снова получается формула гл. 6. Дисперсия ошибок σ^2 оценивается без смещения формулой

$$\sigma^{*2} = \frac{T}{T-m} C_0.$$

Зато когда ошибки подчинены некоторой зависимости, тогда оценка σ^2 с помощью σ^{*2} содержит, вообще говоря, смещение, равное

$$-\frac{2\sigma^2}{T-m} \sum_{\theta=1}^{T-1} \rho_\theta \operatorname{tr}(R_\theta).$$

Дисперсия σ^2 получается заниженной, если, как это часто наблюдается, в последовательностях $\{\rho_\theta\}$ и $\{\operatorname{tr}(R_\theta)\}$ доминируют положительные члены.

Например, предположим, что $\rho_\theta = (0,8)^\theta$ (случай авторегрессионного процесса первого порядка, $\varepsilon_t = 0,8\varepsilon_{t-1} + \eta_t$), существуют две экзогенные переменные, одна из которых равна постоянной (случай простой регрессии), и

$$R_\theta = \begin{bmatrix} (0,8)^\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta \geq 0. \quad (24)$$

Смещение вычисляется непосредственно и оказывается близким к

$$-11,5 \frac{\sigma^2}{T-2}.$$

Однако это приближение пригодно лишь для числа наблюдений порядка 30. Как бы то ни было данный пример характерен очень заметным смещением.

Формула (22) показывает также смещение оценки коррелограммы ошибок с помощью коррелограммы остатков. Эта формула дает хорошее приближение лишь для значений τ малых по сравнению с T . Однако в любом случае на практике ограничиваются изучением первых членов коррелограммы. Изучение нескольких простых ситуаций позволит выявить некоторые интересные особенности.

(а) Если процесс ошибок является чисто случайным, все γ_τ равны нулю, кроме $\gamma_0 = \sigma^2$. При этих условиях математическое ожидание C_0 равно $\sigma^2 (1 - (m/T))$, а для C_τ (при $\tau \neq 0$) равно

$$-\frac{\sigma^2}{T} \operatorname{tr}(R_\tau).$$

Коррелограмма остатков имеет член $r_\tau = C_\tau/C_0$, математическое ожидание которого тогда мало отличается от

$$\frac{-1}{T-m} \operatorname{tr}(R_\tau).$$

Коэффициенты автокорреляции для ε_t^* проявляют себя в автокорреляции экзогенных переменных, уменьшая ее и изменяя ее знак.

(б) Если последовательность z_t полностью неупорядочена, в том смысле, что R_τ близки к нулевой матрице (кроме, очевидно, $R_0 = I$), формула (22) сводится к

$$E(C_0) \approx \sigma^2(1 - (m/T)), \quad E(C_\tau) \approx \sigma^2 \rho_\tau(1 - (2m/T)) \text{ для } \tau > 0.$$

Коэффициенты автокорреляции r_τ содержат еще одну систематическую ошибку:

$$E(r_\tau) \approx \rho_\tau \left(1 - \frac{m}{T-m} \right). \quad (25)$$

В этих условиях эмпирическая коррелограмма обычно дает заниженные зависимости ошибок.

(в) При наличии единственной постоянной экзогенной переменной, т. е. если модель специфицирует x_t в виде стационарного процесса с неизвестной средней, все R_τ суть числа, равные 1, и формула (22) сводится к

$$E(C_\tau) \approx \gamma_\tau - \frac{1}{T} \gamma_0 - \frac{2}{T} \sum_{\theta=1}^{\tau-1} \gamma_\theta.$$

Та же систематическая ошибка влияет на все C_τ , включая эмпирическую дисперсию C_0 ; пусть $-\sigma^2 B/T$ будет этой ошибкой, где

$$B = 1 + 2 \sum_{\theta=1}^{\tau-1} \rho_\theta.$$

В первом приближении математическое ожидание эмпирической коррелограммы дается формулой

$$E(r_\tau) \approx \rho_\tau - \frac{B}{T}(1 - \rho_\tau). \quad (26)$$

Эта коррелограмма обычно занижает положительную связь ошибок и завышает отрицательную зависимость. Например, если $\rho_0 = (0,8)^0$, то коэффициент B близок к 9; смещение для ρ_1 близко к $-1,8/T$; смещение для ρ_2 близко к $-3,2/T$ и т. д. Несколько этих случаев помогают показать, что отклонения между истинной коррелограммой $\{\rho_\theta\}$ и коррелограммой, вычисленной для остатков $\{r_\theta\}$, могут быть существенными в выборках такого объема, с которыми работают в эконометрии.

Можно, конечно, попытаться исправить коррелограмму остатков так, чтобы устранить смещение. Например, часто принимается, что ошибки образуют авторегрессионный процесс первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t,$$

где η_t — чисто случайный процесс. Тогда коэффициент ρ часто оценивается первым коэффициентом r_1 эмпирической коррелограммы (или же эквивалентной величиной $1 - (d^*/2)$, где d^* — величина, найденная

для критерия Дарбина — Уотсона). Не содержащая существенного смещения оценка дается выражением:

$$\left(1 + \frac{m}{T-m}\right) r_1,$$

если экзогенные переменные образуют совершенно беспорядочное изменение ($R_\tau \approx 0$ для $\tau > 0$), и выражением:

$$r_1 + \frac{m}{T} (1 + r_1),$$

если эти переменные обладают лишь медленными изменениями ($R_\tau \approx 1$ по крайней мере для малых значений τ). Практически в большинстве случаев оценка типа $r_1 + (m/T)$, по-видимому, должна подходить лучше, чем r_1 .

Систематическим отклонениям между ковариациями остатков и ковариациями ошибок соответствуют, очевидно, систематические отклонения между спектром, оцениваемым для остатков, и спектром ошибок. Можно определить эти отклонения, если приблизить формулу (22) к уравнению (8), которым в гл. 11 определена спектральная плотность (см. также по этому вопросу [137, с. 133—138]).

5. Дисперсии оценок и критерии гипотез

Когда ошибки не образуют чисто случайного процесса, обычные формулы, приведенные в гл. 6, становятся непригодными для вычисления ковариационной матрицы a^* . В самом деле,

$$a^* - a = [M_{zz}]^{-1} m_{ze},$$

откуда

$$E[(a^* - a)(a^* - a)'] = [M_{zz}]^{-1} \cdot E[m_{ze} m_{ez}] [M_{zz}]^{-1}.$$

Но, как указывалось выше,

$$E[m_{ze} m_{ez}] \approx \frac{1}{T} \sum_{\theta=1-T}^{T-1} \gamma_\theta M_{zz}^\theta,$$

что приводит к формуле

$$E[(a^* - a)(a^* - a)'] \approx \left[\sum_{\theta=1-T}^{T-1} \rho_\theta R_\theta \right] \left[\frac{\sigma^2}{T} (M_{zz})^{-1} \right], \quad (27)$$

которая была получена впервые ¹ Г. Волдом [326].

В этом выражении второй множитель не зависит от автокорреляции ошибок. Лишь первый множитель является новым. Он в точности равен I в двух случаях: если все ρ_θ равны нулю (кроме $\rho_0 = 1$), случай

¹ Э. Литткенс [200] получил более общую формулу для моделей со случайными экзогенными переменными, коррелированными с ошибками, влияющими на другие наблюдения. (Он предполагает, таким образом, что $E(e_t z_t) = 0$, но не обязательно $E(e_{t-\tau} z_t) = 0$, когда $\tau \neq 0$.)

уже известный; и если все R_{θ} равны нулю (кроме $R_0 = I$). Таким образом, обычные формулы применимы при отсутствии автокорреляции экзогенных переменных при любой автокорреляции ошибок. Но такой случай редко встречается на практике.

Для того чтобы лучше понять важность первого множителя в формуле (27), предположим, что коррелограмма ошибок удовлетворяет соотношению:

$$\rho_{\theta} = \rho^{\theta}, \text{ где } |\rho| < 1. \quad (28)$$

Предположим еще, что имеются две экзогенные переменные, причем вторая является вспомогательной переменной, всегда равной 1 (случай простой регрессии). Примем, наконец, что матрица R_{θ} записывается в виде:

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \lambda^{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } |\lambda| < 1. \quad (29)$$

Первый множитель (27) будет тогда мало отличаться от

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \text{ где } k_1 = \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}, \quad k_2 = \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Числа k_1 и k_2 — множители, на которые следует умножить формулы, дающие дисперсии оценок углового коэффициента, и ординаты при нулевой абсциссе для прямой регрессии (см. гл. 3).

Однако для оценки дисперсии и ковариаций нужно еще располагать оценкой σ^2 . Использование σ^{*2} вводит обычно новую систематическую ошибку. Смещение, определенное формулой (23), накладывается на только что изученное.

Т а б л и ц а 2

Автокорреляция ошибок (ρ)	Автокорреляция экзогенной переменной (λ)				
	-0,4	0	0,4	0,6	0,8
Множитель для вычисления дисперсии углового коэффициента — k'_1					
-0,4	1,4	1	0,7	0,6	0,5
0	1	1	1	1	1
0,4	0,8	1,1	1,5	1,8	2,1
0,6	0,8	1,2	1,9	2,6	3,6
0,8	1,2	1,7	3,4	6	11
Множитель для вычисления дисперсии ординаты при нулевой абсциссе — k'_2					
-0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5
0	1	1	1	1	1
0,4	2,5	2,5	2,5	2,5	2,6
0,6	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0,8	14	15	16	18	22

Чтобы получить несмещенные оценки, в рассмотренном частном примере обычные выражения для оценок дисперсий углового коэффициента и ординаты при нулевой абсциссе необходимо умножить на следующие множители:

$$k'_1 = \frac{\sigma^2}{E(\sigma^{*2})} k_1; \quad k'_2 = \frac{\sigma^2}{E(\sigma^{*2})} k_2.$$

Табл. 2 дает величины k'_1 и k'_2 для некоторых значений ρ и λ и для выборки с $T = 22$ наблюдениями.

В целом при малой автокорреляции ошибок или экзогенной переменной среднеквадратические отклонения, оцениваемые с помощью обычных формул, достаточно близки к истинным среднеквадратическим отклонениям. Наоборот, при сильной автокорреляции одновременно ошибок и экзогенной переменной среднеквадратические отклонения могут увеличиться в два и даже в четыре раза по сравнению с оценками по обычным формулам.

Однако большая часть величин, введенных как экзогенные переменные, имеет достаточно медленную эволюцию. Их автокорреляция обычно велика. Поэтому следует напомнить, что *обычные формулы сильно завышают точность оценок каждый раз, когда существует значительная временная зависимость ошибок.*

Эти соображения позволяют также получить хорошую оценку выигрыша в точности, которую можно получить, разбивая на части периоды наблюдения и увеличивая, таким образом, число доступных для оценки данных. До последнего времени в эконометрических моделях использовали лишь годовые данные. Однако развитие квартальных национальных счетов и улучшение статистических рядов делают возможным использование квартальных данных.

Таким образом, для некоторого периода фиксированной продолжительности число наблюдений возрастает в 4 раза. Однако среднеквадратические отклонения оценок не уменьшаются вдвое. Это объясняется по меньшей мере двумя причинами¹: с одной стороны, обычно нужно оценить некоторые новые параметры, характеризующие сезонные колебания, с другой — временная связь ошибок увеличивается при переходе от годового к более короткому периоду.

Для иллюстрации последнего вывода предположим, что ошибки следуют авторегрессионному процессу с коэффициентами автокорреляции (28), при этом используются квартальные данные. Легко вычислить коэффициенты автокорреляции соответствующих годовых ошибок:

$$\hat{\rho}_\theta = \frac{1}{2} \rho^{\theta-1} (1 + \rho), \quad \text{где } \theta = 2, 4, 6, \dots$$

В дисперсию оценки постоянного члена входит множитель

$$k_2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

¹ На практике следует также учитывать, что статистическое качество квартальных рядов часто гораздо ниже, чем годовых.

с полугодичными данными и множитель

$$\hat{k}_2 = \frac{1}{1-\rho}$$

с годовыми данными. В результате подстановки полугодичного ряда вместо годового дисперсия постоянного слагаемого умножается на $(1 + \rho)/2$ (а не на $1/2$). Если, например, $\rho = 0,40$, то первый коэффициент автокорреляции ряда годовых ошибок равен: $\hat{\rho}_2 = 0,28$ и дисперсия постоянного члена умножается на $0,7$. Если $\rho = 0,80$ и $\hat{\rho}_2 = 0,72$, то дисперсия умножается на $0,9$.

Разница между членами k_1 и \hat{k}_1 , относящимися к коэффициенту обычной экзогенной переменной, будет не так сильно выражена; переход к полугодичному ряду позволяет лучше воспользоваться иррегулярностью эволюции этой переменной. Подобные иррегулярности часто не велики по сравнению с медленной тенденцией явления. Но иногда они играют большую роль в некоторых изучаемых явлениях. Так, экономический анализ конъюнктурных колебаний активности заметно выиграл в точности в результате использования в моделях квартальных данных. В течение послевоенного периода циклические движения различных характерных величин большей частью растворяются в годовых данных, и, наоборот, они становятся явными в квартальных данных.

Обычные критерии для коэффициентов модели a_j , очевидно, чувствительны по отношению к автокорреляции ошибок точно так же, как и формулы для дисперсии оценок.

Так, в простой регрессии обычный критерий для углового коэффициента предполагает, что величина

$$\frac{a^* - a}{\sigma_a^*}$$

распределена по закону Стьюдента с $T - 2$ степенями свободы и σ_a^* определено тогда равенством:

$$\sigma_a^{*2} = \frac{\sigma_e^{*2}}{\sum (z_t - \bar{z})^2}, \quad \text{где} \quad \sigma_e^{*2} = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^{*2}.$$

Если ошибки распределены нормально, гомоскедастичны и некоррелированы, то это свойство следует из того, что $a^* - a$ распределено по центрированному нормальному закону с дисперсией

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (z_t - \bar{z})^2}$$

и из того, что $(T - 2) \sigma_e^{*2} / \sigma^2$ следует закону χ^2 , не зависящему от закона распределения $a^* - a$. Если ошибки автокоррелированы, то $a^* - a$ распределено по нормальному закону; однако его дисперсия отличается от приведенной выше. Более того, $(T - 2) \sigma_e^{*2} / \sigma^2$ в этом случае не следует закону χ^2 и не может считаться независимым от $a^* - a$.

Уровень значимости и реальная мощность обычных критериев не изучались для случая зависимых ошибок. По-видимому, смещение в оценке дисперсии коэффициентов a_j^* будет наиболее существенным источником ошибки. Можно надеяться, что после исправления этого смещения критерии станут более точными. Так, для простой регрессии выражение

$$(a^* - a) / \sqrt{k_1' \sigma_a^*},$$

по-видимому, следует закону, близкому к распределению Стьюдента с $T - 2$ степенями свободы.

6. Эффективность метода наименьших квадратов

В случае, когда последовательные ошибки зависимы, метод наименьших квадратов не обладает оптимальными свойствами, рассмотренными в гл. 6. Какова тогда его эффективность? Этот вопрос подробно изучался в работах [126], [258].

Примем, что ошибки следуют некоторому вполне недетерминированному авторегрессионному стационарному случайному процессу (см. гл. 11, § 7). Можно определить последовательность чисел $\{b_\tau\}$ и неавтокоррелированный стационарный процесс $\{\eta_t\}$ так, что

$$\varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - b_\tau \varepsilon_{t-\tau} - \dots = \eta_t. \quad (31)$$

Пусть тогда u_t и w_t — переменная и вектор, полученные исходя из x_t и z_t , вследствие соотношения:

$$\begin{cases} x_t - b_1 x_{t-1} - \dots - b_\tau x_{t-\tau} - \dots = u_t, \\ z_t - b_1 z_{t-1} - \dots - b_\tau z_{t-\tau} - \dots = w_t. \end{cases}$$

С помощью этих определений модель записывается следующим образом:

$$u_t = a' w_t + \eta_t. \quad (32)$$

Так как η_t не подвержены автокорреляции, регрессия по методу наименьших квадратов u_t относительно w_t дает линейную оценку a без систематической ошибки и с минимальной дисперсией.

В действительности этот метод применяется редко, так как, вообще говоря, неизвестен ни процесс ошибок, ни b_τ , которые входят в его авторегрессионное представление. Но, даже если процесс известен, метод можно применять лишь с некоторым приближением. Он будет точным, только когда все b_τ начиная с некоторого номера будут равны нулю. В самом деле, определения включают неограниченное количество чисел $x_{t-\tau}$ и $z_{t-\tau}$, однако наблюдаемая выборка содержит всегда лишь конечное число значений.

Как бы то ни было линейный метод с минимальным рассеянием дает отправную точку для оценки эффективности оценок, полученных обычным методом. В общем изучение этого вопроса приводит к следующим заключениям.

а) Если последовательность ошибок $\{\varepsilon_t\}$ содержит лишь слабую автокорреляцию, то метод наименьших квадратов имеет эффективность, отличающуюся от 1 лишь на бесконечно малые величины второго порядка (относительно коэффициентов автокорреляции). Это прямое следствие предложения 4, гл. 5.

б) Эффективность метода наименьших квадратов (примененного к x_t и z_t) зависит одновременно от характеристик автокорреляции величин ε_t и от последовательности $\{z_t\}$. Для некоторых последовательностей экзогенных переменных (постоянных, синусоидальных

или полиномиальных функций времени) эта эффективность стремится к эффективности линейного оптимального метода при неограниченном возрастании числа наблюдений T .

Подробное изучение этих двух пунктов было бы достаточно сложным¹. Ограничимся случаем² авторегрессионного процесса первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

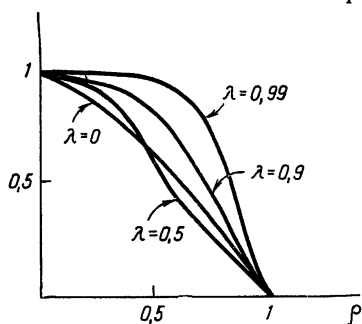


Рис. 4

Линейный метод с минимальным рассеянием сводится к регрессии по методу наименьших квадратов:

$$u_t = x_t - \rho x_{t-1}$$

относительно

$$w_t = z_t - \rho z_{t-1}.$$

Ковариационная матрица оценки тогда равна

$$\frac{\sigma^2}{T} M_{ww}^{-1}.$$

Но

$$\sigma_\eta^2 = (1 - \rho^2) \sigma^2 \text{ и } M_{ww} \approx (1 + \rho^2) M_{zz} - 2\rho M_{zz} R_1.$$

Ковариационная матрица записывается также в виде:

$$[(1 - \rho^2) \{1 + \rho^2\} I - 2\rho R_1]^{-1} \cdot \left[\frac{\sigma^2}{T} M_{zz}^{-1} \right]. \quad (34)$$

Для оценки эффективности метода наименьших квадратов, примененного непосредственно к x_t и z_t , надо сравнить первые скобки в выра-

¹ Дальнейшие детали, примеры и определение нижней границы эффективности обычной оценки можно найти у Э. Хэннана [137, с. 108—117].

² Несомненно, что для годовых наблюдений (и даже квартальных) достаточно взять авторегрессионный процесс первого порядка, чтобы представить связь между ошибками. В случае месячных данных подобное представление может быть неадекватным.

жениях (27) и (34). Если, например, существует единственная экзогенная переменная с $R_\theta = \lambda^\theta$, то искомая эффективность дается равенством:

$$\frac{1-\rho^2}{[(1+\rho^2)-2\rho\lambda]} \cdot \frac{1-\rho\lambda}{1+\rho\lambda},$$

разложение которого до второй степени по ρ имеет вид:

$$1 - 2\rho^2 (1 - \lambda^2).$$

В соответствии с вышеприведенными общими результатами можно установить, что это выражение имеет вторую степень по ρ и принимает значение 1 для $\lambda = \pm 1$. Эффективность обычной регрессии по методу наименьших квадратов еще довольно высока для значений ρ , достигающих 0,5 (рис. 4 дает изменения этой эффективности как функции ρ для четырех значений λ).

7. Оценки в моделях с зависимыми ошибками

Когда коэффициенты b_τ авторегрессионного представления процесса $\{\varepsilon_t\}$ известны, то для оценки a можно применить линейный метод с минимальной дисперсией. Как мы видели в предыдущем параграфе, достаточно вычислить регрессию по методу наименьших квадратов для преобразованных переменных u_t и w_t или по крайней мере для приближенных значений этих переменных, получающихся из разложений (32), когда в них ограничиваются несколькими членами.

Однако практически нам неизвестен случайный процесс, которому следуют ошибки. Таким образом, необходимо обратиться к менее прямым методам.

Определенные ниже в пунктах (а), (б) и (в) оценки предполагают, что априори известна форма авторегрессионного представления и для ее полного определения достаточно определить несколько коэффициентов b_τ . Эти оценки, вообще говоря, асимптотически эквивалентны линейной оценке с минимальной дисперсией. В самом деле, они определяются с помощью тех же формул, что и линейная оценка, причем неизвестные коэффициенты b_τ заменяются вычисленными коэффициентами b_τ^* . Тогда *сходимость b_τ^* к b_τ достаточна для асимптотической эквивалентности оценок.*

Покажем это для случая, в котором ошибки подчиняются авторегрессионному процессу первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t, \quad \text{где } |\rho| < 1.$$

Оценка с минимальной дисперсией \hat{a} определяется тогда как

$$\hat{a} = [M_T(\rho)]^{-1} m_T(\rho),$$

причем матрица $M_T(\rho)$ и вектор $m_T(\rho)$ даются равенствами:

$$M_T(\rho) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_t - \rho z_{t-1})(z_t - \rho z_{t-1})';$$

$$m_T(\rho) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \rho x_{t-1})(z_t - \rho z_{t-1}).$$

Пусть тогда ρ_T — некоторая величина, которая сходится по вероятности к ρ , когда T неограниченно возрастает, и пусть дана оценка:

$$a_T = [M_T(\rho_T)]^{-1} m_T(\rho_T).$$

Требуется показать, что $\sqrt{T}(a_T - \hat{a})$ стремится по вероятности к нулю, так как тогда $\sqrt{T}(a_T - a)$ будет иметь тот же самый предельный закон, что и $\sqrt{T}(\hat{a} - a)$ (см. предложение 6 в приложении к гл. 9).

Но легко можно вычислить:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(a_T - \hat{a}) &= \{[M_T(\rho_T)]^{-1} - [M_T(\rho)]^{-1}\} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \eta_t z_t - \\ &- \{\rho_T [M_T(\rho_T)]^{-1} - \rho [M_T(\rho)]^{-1}\} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \eta_t z_{t-1} + (\rho - \rho_T) [M_T(\rho_T)]^{-1} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \varepsilon_{t-1} (z_t - \rho z_{t-1}) + (\rho - \rho_T)^2 [M_T(\rho_T)]^{-1} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \varepsilon_{t-1} z_{t-1}. \end{aligned}$$

Каждый из четырех членов этой суммы является произведением матрицы на вектор. Чтобы установить сходимость к нулю выражения $\sqrt{T}(a_T - \hat{a})$, достаточно показать, что матрицы стремятся к нулевой матрице, а векторы имеют предельные законы (см. предложение 4 в приложении к гл. 9). Однако матрицы стремятся к нулю, когда z_t ограничены, M_{zz} стремится к невырожденной матрице и R_1 стремится к некоторому пределу, так как тогда $M_T(\rho_T)$ и $M_T(\rho)$ стремятся одновременно к одному и тому же невырожденному пределу. (Если бы этот предел был вырожденным, то существовал бы такой вектор u , что выражение:

$$\frac{1}{T} \sum [u'(z_t - \rho z_{t-1})]^2$$

стремилось бы к нулю. Но тогда в силу неравенства Шварца $\frac{1}{T} \sum (u' z_t)^2$ тоже стремилось бы к нулю, и предел M_{zz} был бы вырожденным.) Аналогично векторы имеют предельные нормальные законы, когда ε_t ограничены и η_t образуют стационарный чисто случайный процесс с нулевым математическим ожиданием (см. приложение к гл. 6 и соображения в конце § 3 настоящей главы относительно асимптотической нормальности).

Этот результат показывает, что матрица асимптотических ковариаций для a_T та же, что и для \hat{a} . Сходящаяся оценка этой матрицы дается выражением:

$$\sigma_T^2 [M_T(\rho_T)]^{-1},$$

где σ_T^2 обозначает среднее значение квадратов

$$(\varepsilon_t^T - \rho_T \varepsilon_{t-1}^T)^2,$$

построенных с помощью остатков ε_t^T . Формула для матрицы асимптотических ковариаций применяется к оценкам, определенным ниже в пунктах а), б) и в).

а) Первый метод состоит из следующих операций: прямое выравнивание по методу наименьших квадратов для переменных x_t и z_t ; оценка неизвестных коэффициентов b_τ авторегрессионного представления с помощью остатков ε_t^* ; приближенное вычисление переменных u_t и w_t ; окончательное выравнивание с помощью регрессии по методу наименьших квадратов для вычисленных таким образом величин u_t^* и w_t^* .

Этот метод асимптотически эквивалентен линейной оценке с минимальной дисперсией, во всяком случае, если к вычислению b_τ применяется сходящаяся процедура. В следующей главе будет показано, что коэффициенты b_τ некоторого случайного процесса можно вычислить с помощью коэффициентов автокорреляции ρ_θ . В формулах ρ_θ заменяются на коэффициенты r_θ , относящиеся к остаткам. Сходимость r_θ к ρ_θ повлечет сходимость оцененных коэффициентов b_τ^* к соответствующим истинным значениям.

Асимптотическое обоснование метода не очень убедительно в случае малых выборок. С одной стороны, нужно выбрать априори число сохраняемых членов в авторегрессионном разложении; чаще всего довольствуются двумя первыми, т. е. действуют так, как если бы истинное представление было авторегрессионным первого порядка. С другой стороны, оценка b_τ содержит существенные систематические ошибки, как и оценка ρ_θ с помощью r_θ (см. выше § 4).

б) Тот же принцип можно применять более систематически (см. [170, с. 85—89], по поводу определения этого метода и [270], где даны различные интересные дополнения).

Можно оценить одновременно a и коэффициенты b_τ , фиксируя априори число сохраняемых членов в разложении ε_t . Предположим, например, что мы взяли авторегрессионный процесс первого порядка. Зависимость (33) записывается тогда в виде:

$$x_t = \rho x_{t-1} + a' z_t - \rho a' z_{t-1} + \eta_t. \quad (35)$$

Прямая оценка этой зависимости дает одновременно значения для ρ и a .

Модель (35) имеет две особенности. Прежде всего, для ее коэффициентов существует априорное ограничение, так как коэффициент $z_{j,t-1}$ должен быть равен произведению коэффициентов z_{jt} и x_{t-1} с обратным знаком. Мы уже рассматривали способы преодоления

этих трудностей. Более того, модель устанавливает авторегрессионную зависимость между x_t и x_{t-1} . В следующей главе будет показано, что этот факт не приводит ни к какому изменению методов регрессии, хотя и заметно влияет на свойства полученных оценок¹.

На практике определяют ρ и a так, чтобы минимизировать сумму S квадратов отклонений между x_t и

$$\rho x_{t-1} + a' z_t - \rho a' z_{t-1}.$$

Дифференцируя S по ρ и a , получают весьма сложные нелинейные уравнения. Поэтому предпочитают следующий итеративный способ вычисления:

1) от значения $\rho^{(0)}$, выбранного априори (например, $\rho^{(0)} = 0$), определяется вектор $a^{(1)}$, который минимизирует S для $\rho = \rho^{(0)}$, т. е. берется регрессия $x_t - \rho^{(0)} x_{t-1}$ по $z_t - \rho^{(0)} z_{t-1}$;

2) определяется число $\rho^{(2)}$, которое минимизирует S для $a = a^{(1)}$, т. е. вычисляется коэффициент автокорреляции первого порядка для остатков:

$$e_t^{(1)} = x_t - a^{(1)'} z_t;$$

3) определяется вектор $a^{(3)}$, который минимизирует S для $\rho = \rho^{(2)}$, т. е. регрессия для $x_t - \rho^{(2)} x_{t-1}$ по $z_t - \rho^{(2)} z_{t-1}$ и так далее².

Каждый этап приводит только к решению системы линейных уравнений. После нескольких итераций можно заметить сходимость к значениям вектора a и числа ρ , так что вычисления довольно скромные³.

¹ Очевидно, при желании можно рассматривать модель (35) с помощью байесовых методов: см. по этому поводу [347].

² Видно, что рассмотренный в пункте а) метод начинается с $\rho^{(0)} = 0$ и заканчивается оценкой $a^{(3)}$.

³ Дж. Сарган [269] показал, при каких условиях тот же самый принцип можно применить к вычислению асимптотически эффективных оценок в моделях с несколькими уравнениями $x_t = A z_t$, на которые влияют ошибки, подчиняющиеся многомерному авторегрессионному процессу вида:

$$e_t = R e_{t-1} + \eta_t,$$

где R — квадратная матрица порядка n , не полностью определенная априори.

При некоторых условиях этот принцип применяется, даже когда матрица A подчиняется некоторым ограничениям, вид которых будет рассматриваться в пятой части.

Отметим, в частности, случай уравнения в переопределенной модели (например, уравнение h). Примем, что ошибка e_{ht} подчиняется авторегрессионному процессу

$$e_{ht} = \rho_h e_{h, t-1} + \eta_{ht},$$

в который не входят ошибки других уравнений. Разумеется, e_{ht} может коррелировать с другими составляющими e_t посредством η_{ht} . Тогда коэффициенты уравнения h и параметры ρ_h можно оценить с помощью описанного выше итерационного метода, применяя на этапе $(2p + 1)$ метод Комиссии Коулса для переменных

$$x_t - \rho_h^{(2p)} x_{t-1} \text{ и } z_t - \rho_h^{(2p)} z_{t-1}$$

и определяя $\rho^{(2p+2)}$ как коэффициент автокорреляции остатков относительно уравнения, выравненного на этапе $(2p + 1)$.

в) Только что предложенный метод является, впрочем, довольно громоздким. Его редко решаются применять на практике. Дж. Дарбин [77], [78] предложил более быструю и асимптотически столь же эффективную процедуру, при которой вычисления едва ли длиннее, чем для первого описанного выше метода, а эффективность для малых выборок, по-видимому, должна быть лучшей. Здесь его достаточно изложить для случая ошибок, подчиняющихся авторегрессионному процессу первого порядка.

При выравнивании зависимости (35) трудность заключается в априорном ограничении, которое связывает коэффициенты z_{t-1} с таковыми для x_{t-1} и z_t . Однако можно получить сходящуюся оценку для ρ , если пренебречь этим априорным ограничением, иными словами, если вычислить линейную регрессию для

$$x_t = \rho x_{t-1} + a' z_t + b' z_{t-1} + \eta_t.$$

Пусть $\hat{\rho}$ — полученная таким образом оценка.

Дж. Дарбин предложил оценивать ρ с помощью $\hat{\rho}$ и определять вектор \hat{a} оцениваемых коэффициентов посредством второй линейной регрессии между

$$x_t - \hat{\rho} x_{t-1} \text{ и } z_t - \hat{\rho} z_{t-1}.$$

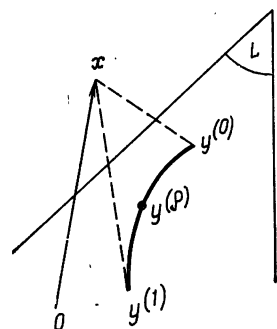


Рис. 5

г) Менее точный, хотя иногда и практически удовлетворительный, метод состоит в вычислении *двух регрессий по методу наименьших квадратов, а именно регрессии для x_t относительно z_t и регрессии для $x_t - x_{t-1}$ относительно $z_t - z_{t-1}$* . В частности, Р. Стоун [284] применял этот метод систематически. Рассмотрим его логику.

Предположим, что зависимость между ошибками достаточно хорошо представляется авторегрессионным процессом первого порядка с коэффициентом автокорреляции ρ , заключенным между 0 и 1. Зависимость типа прямой связи достаточна для годовых и некоторых квартальных рядов; коэффициент ρ обычно не отрицателен, так как на две последовательные ошибки влияют одни и те же факторы, и меньше 1, поскольку процесс стационарен.

Линейный метод с минимальной дисперсией состоит тогда в вычислении регрессии по методу наименьших квадратов для $x_t - \rho x_{t-1}$ относительно $z_t - \rho z_{t-1}$. Из теории линейного выравнивания известно, что эта регрессия соответствует в пространстве T измерений проекции вектора x (представляющего значения, принимаемые эндогенной переменной) на линейное многообразие L с t измерениями (соответствующее таким векторам, что $y_t = a' z_t$ для некоторого вектора a), эта проекция строится параллельно направлению, которое зависит от ρ . При изменении ρ от 0 до 1 проекция $y(\rho)$ перемещается по дуге кривой, содержащейся в L . Эта дуга не является линейной. Но можно показать, что в некотором смысле $y(\rho)$ есть промежуточные значения между $y(0)$ и $y(1)$.

Положим:

$$m_{zx}(\rho) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (z_t - \rho z_{t-1})(x_t - \rho x_{t-1})$$

и

$$M_{zz}(\rho) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (z_t - \rho z_{t-1})(z_t - \rho z_{t-1})'.$$

Проекция $y(\rho)$ соответствует вектору $a^*(\rho)$ для оцениваемых коэффициентов β

$$M_{zz}(\rho) \cdot a^*(\rho) = m_{zx}(\rho).$$

Но легко находим:

$$\left. \begin{aligned} m_{zx}(\rho) &\approx (1-\rho)^2 m_{zx}(0) + \rho m_{zx}(1), \\ M_{zz}(\rho) &\approx (1-\rho)^2 M_{zz}(0) + \rho M_{zz}(1). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получается соотношение:

$$(1-\rho)^2 M_{zz}(0) [a^*(\rho) - a^*(0)] + \rho M_{zz}(1) [a^*(\rho) - a^*(1)] = 0,$$

которое позволяет вычислить $a^*(\rho)$ с помощью $a^*(0)$, $a^*(1)$ и соответствующих матриц M_{zz} .

Так как матрицы M_{zz} положительно определенные, это соотношение показывает также, что для каждого значения ρ , содержащегося между 0 и 1,

$$\left. \begin{aligned} [a^*(\rho) - a^*(0)]' M_{zz}(1) [a^*(\rho) - a^*(1)] &\leq 0, \\ [a^*(\rho) - a^*(1)]' M_{zz}(0) [a^*(\rho) - a^*(0)] &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Если существует лишь одна экзогенная переменная ($m = 1$), тогда то или иное из этих соотношений показывает, что $a^*(\rho) - a^*(0)$ и $a^*(\rho) - a^*(1)$ имеют противоположные знаки и, следовательно, $a^*(\rho)$ обязательно содержится между $a^*(0)$ и $a^*(1)$. В общем случае соотношения (36) показывают, в каком смысле $a^*(\rho)$ сосредоточено между $a^*(0)$ и $a^*(1)$.

Наконец, значения $a^*(0)$ и $a^*(1)$, полученные в двух рассматриваемых регрессиях, ограничивают значение $a^*(\rho)$, которое было бы определено в случае применимости линейного метода с минимальной дисперсией. Если $a^*(0)$ и $a^*(1)$ близки, то они достаточно точно определяют оценку a . При их заметном различии следует точнее изучить зависимость ошибок и применить более изощренную процедуру. На практике часто оказывается, что $a^*(0)$ и $a^*(1)$ близки.

д) Предыдущие методы основаны на упрощенных гипотезах относительно формы случайного процесса ошибок. В практических приложениях их применение ограничивается обычно случаем авторегрессионного процесса первого порядка. Подобная спецификация может оказаться довольно бедной. По-видимому, когда анализируемые ряды сравнительно длинны, применение методов, обладающих большей общностью, дает более точные результаты.

К спектральным представлениям рядов в области частот применяется вполне естественный метод (его предложил Э. Хэннан [139]; Д. Дункан и Р. Джонс [72] разработали вычислительную процедуру).

Используя обозначения гл. 12, § 12, представим ряд $\{x_t\}$ с помощью T'' комплексных составляющих:

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{t=1}^T x_t e^{i\omega_k t}; \quad (37)$$

$$k = 1, 2, \dots, T'',$$

где

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T},$$

причем T'' равно $(T-1)/2$ или $T/2 - 1$ в зависимости от того, будет ли T нечетным или четным. Пусть также Z_{jh} и E_h спектральные составляющие рядов $\{z_{jt}\}$ и $\{\varepsilon_t\}$. Из регрессии (1) получаем:

$$X_k = \sum_{j=1}^m a_j Z_{jh} + E_k; \quad k = 1, 2, \dots, T''. \quad (38)$$

Стационарность процесса $\{\varepsilon_t\}$ означает, что корреляция между E_h и E_h равна нулю для $h \neq k$, а корреляция между действительной и мнимой частями E_h также будет равна нулю. Впрочем, эти действительная и мнимая части имеют дисперсии, изменяющиеся вместе с k (зависимость ошибок во временной области становится гетероскедастичностью для модели в области частот).

Обычно принимается, что спектральная плотность $\{\varepsilon_t\}$ изменяется регулярно вместе с ω ; общая дисперсия двух частей E_h оценивается тогда на полосе частот ω_{k+h} с той и другой стороны от ω_k , причем h изменяется от $-m'$ до m' . Пусть $\Sigma_k^{*2} = 4\pi f_s^2(\omega_k)$ — принятая оценка. Чаще всего Σ_k^* находится из спектрального представления рядов (см., например, формулу (83) гл. 12, применимую к случаю одной экзогенной переменной).

Для оценки a_j модель (38) наводит на мысль воспользоваться регрессией X_k/Σ_k^* относительно Z_{jh}/Σ_k^* . Если бы Σ_k^{*2} для различных частот ω_k были в точности равны значениям спектральной плотности $\{\varepsilon_t\}$, умноженным на 4π , то полученная таким образом линейная оценка совпадала бы с эффективной оценкой Гаусса — Маркова. Но принятый метод оценки спектральной плотности можно обычно оправдать тем, что она сходится к истинной плотности, если число наблюдений неограниченно возрастает. (Уточнение этого момента увело бы нас довольно далеко; мы не будем пытаться сделать это здесь.) Определенные таким образом оценки \hat{a}_j являются, следовательно, асимптотически эффективными.

Рассматриваемая регрессия должна получаться минимизацией выражения:

$$\sum_{k=1}^{T''} \frac{1}{\Sigma_k^{*2}} \left[X_k - \sum_{j=1}^m a_j Z_{jh} \right] \left[\bar{X}_k - \sum_{j=1}^m a_j \bar{Z}_{jh} \right], \quad (39)$$

где \bar{X}_k — комплексное число, сопряженное с X_k . Она приводит к нормальным уравнениям, которые можно записать в матричной форме:

$$m_{xz} - M_{zz} \hat{a} = 0, \quad (40)$$

где

$$[m_{xz}]_j = \frac{1}{2T''} \sum_{k=1}^{T''} (X_k \bar{Z}_{jk} + \bar{X}_k Z_{jk}) / \sum_k^{*2}; \quad (41)$$

$$[m_{zz}]_{ij} = \frac{1}{2T''} \sum_{k=1}^{T''} (Z_{ik} \bar{Z}_{jk} + \bar{Z}_{ik} Z_{jk}) / \sum_k^{*2}. \quad (42)$$

В эти матрицы входят перекрестные периодограммы для $\{x_t\}$, $\{z_{jt}\}$ и для $\{z_{jt}\}$ между собой.

В спектральном анализе рядов обычно заменяют $X_k \bar{Z}_{jn} / 4\pi$ на сглаженную оценку комплексного спектра, которую обозначают $c_{xj}^*(\omega_k)$ — $i g_{xj}^*(\omega_k)$.

Поступая аналогично для других перекрестных периодограмм, (41) и (42) заменяют, в конце концов, на

$$[m_{xz}]_j = \frac{1}{T''} \sum_{k=1}^{T''} c_{xj}^*(\omega_k) / f_{\varepsilon}^*(\omega_k); \quad (43)$$

$$[M_{zz}]_{ij} = \frac{1}{T''} \sum_{k=1}^{T''} c_{ij}^*(\omega_k) / f_{\varepsilon}^*(\omega_k). \quad (44)$$

Формулы (40), (43) и (44) показывают, что \hat{a} определено с помощью оценок действительных коспектров различных переменных.

Вычисление точности оценки вектора \hat{a} производится просто. Можно либо применить обычные формулы множественных регрессий вместе с (43), (44) и

$$m_{xx} = \frac{1}{T''} \sum_{k=1}^{T''} f_x^*(\omega_k) / f_{\varepsilon}^*(\omega_k), \quad (45)$$

либо приравнять единичной матрице второго порядка ковариационную матрицу действительных и мнимых частей E_k / \sum_k^{*2} и взять $M_{zz}^{-1} / (2T'' - m)$ за оценку матрицы ковариаций вектора \hat{a} .

Рассмотрим пример. Проанализируем, как колебания в текстильном производстве влияют на продолжительность рабочей недели в текстильной промышленности. Для этого воспользуемся 80 квартальными наблюдениями с выделенной сезонностью для периода 1948—1967 гг. (продукция оценивается с базы 1959 г., принятой за 100, продолжительность рабочей недели — в часах). Вначале вычисляется регрессия продолжительности рабочей недели относительно производства и длительной тенденции, которая выражается полиномом третьей степени по t . Относящийся к производству коэффициент оказывается равным 0,119, обычные формулы дают для него среднеквадратическое отклонение, равное 0,014. Но статистика d^* Дарбина — Уотсона

равна лишь 0,74, что обнаруживает сильную зависимость ошибок и исключает доверие к оценке среднеквадратического отклонения.

Рассмотрим теперь наблюдения после преобразования их фильтром, определенным формулой (39) гл. 12 (с $\theta = 4$). Как видно, этот фильтр, с одной стороны, устраняет тенденцию, а с другой — преобразует зависимость ошибок, существенно ее уменьшая. Спектральный анализ преобразованных рядов, относящихся к продолжительности рабочей недели и к объему производства, приводит к благоприятному заключению для гипотезы о том, что передаточная функция $T(\omega)$ равна некоторой действительной константе, т. е. для гипотезы о модели простой регрессии (см. гл. 12, § 12).

Простая регрессия для преобразованных рядов приписывает производству коэффициент 0,102, для которого обычная формула дает среднеквадратическое отклонение 0,018. Однако критерий S_k^* , использующий кумулятивную периодограмму остатков, отвергает гипотезу независимости ошибок при уровне значимости 5%. В самом деле, сглаживание по подвижной полосе из семи последовательных частот дает для остатков спектральную плотность, которая проходит через максимум 0,67 для частоты $2\pi/9$ и оказывается заключенной между 0,20 и 0,25 почти для всех частот, больших чем $7\pi/18$.

В этом случае применяют формулы (40), (43) и (44) как с этой оценкой спектральной плотности ошибок, так и с оценкой, получающейся при изучении передаточной функции (формула (83) гл. 12). В обоих случаях используются спектры и коспектры, получающиеся из сглаживания с помощью семи членов периодограмм. Результаты оказываются очень близкими. Они дают коэффициент 0,091 в первом случае и 0,086 — во втором. Среднеквадратическое отклонение этого коэффициента будет равно 0,018.

8. Прогноз в моделях с зависимыми ошибками

При изучении прогноза для эндогенных переменных в моделях с независимыми ошибками была предложена и изучена формула $x_\theta^p = a^* z_\theta$. Согласно этой формуле модель применяется так, как если бы она не содержала ошибок и вектор истинных коэффициентов совпадал с оценкой по методу наименьших квадратов a^* . При наличии зависимости между ошибками последовательных периодов эта формула не оправдывается рассуждениями гл. 6. В самом деле, выборка позволяет получить некоторые сведения, хотя и неполные, относительно значений ошибок в течение периода наблюдений. Из факта зависимости следуют некоторые указания о значениях ошибок за пределами этого периода. Таким образом, можно поступать лучше, чем просто приравнять ошибки нулю, по крайней мере, когда прогноз относится ко времени, мало удаленному от периода наблюдения.

Предположим вначале, что вектор коэффициентов и закон распределения ошибок полностью известны априори; далее, что вектор a оценивается с помощью выборки, но что закон распределения ошибок тоже известен априори. После этого можно провести анализ интерес-

ного для практики случая, в котором a и характеристики для ε_t должны оцениваться одновременно с помощью одной выборки.

1. Если вектор коэффициентов a и процесс ошибок ε_t известны, то прогноз для $x_{T+\theta}$ сводится к прогнозу для

$$\varepsilon_{T+\theta} = x_{T+\theta} - a' z_{T+\theta}.$$

Если $\varepsilon_{T+\theta}^P$ прогноз для $\varepsilon_{T+\theta}$, то в качестве прогноза для $x_{T+\theta}$ возьмем:

$$x_{T+\theta}^P = a' z_{T+\theta} + \varepsilon_{T+\theta}^P. \quad (46)$$

Таким образом, достаточно применить принципы прогноза в случайных процессах и определить $\varepsilon_{T+\theta}^P$ на основе известных значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ (гл. 11, § 8).

Точнее, если потеря измеряется математическим ожиданием квадрата ошибки прогноза, следует принять:

$$x_{T+\theta}^P = E(x_{T+\theta} / x_T, \dots, x_1; z_{T+\theta}; z_T, \dots, z_1),$$

т. е.

$$\varepsilon_{T+\theta}^P = E(\varepsilon_{T+\theta} / \varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \dots, \varepsilon_1).$$

Так как последовательность ошибок обычно ассоциируется с реализацией авторегрессионного процесса, то $\varepsilon_{T+\theta}^P$ можно вычислить с помощью линейного представления процесса, а именно

$$\varepsilon_t = b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \eta_t, \quad (47)$$

где η_t образуют неавтокоррелированный стационарный процесс (в этом случае применяют, например, рекуррентную формулу (53) гл. 11).

Введение в формулу (46), определяющую $x_{T+\theta}^P$, ошибки прогноза $\varepsilon_{T+\theta}^P$, не равной нулю, основывается, очевидно, на том, что знание ошибок вплоть до периода T позволяет предвидеть ошибку периода $T + \theta$ лучше, чем если бы ε_t были независимы между собой.

Впрочем, когда θ возрастает, $\varepsilon_{T+\theta}$ стремится к нулю (см. рис. 6 гл. 11). Преимущество, получающееся от того, что ошибки зависимы, быстро становится призрачным.

Можно получить ту же формулу прогноза, рассуждая несколько иначе. В самом деле, рассмотрим преобразования (32) эндогенных и экзогенных переменных и модель, записанную в форме (33):

$$u_t = a' w_t + \eta_t.$$

Прогнозом для $u_{T+\theta}$ будет:

$$u_{T+\theta}^P = a' w_{T+\theta},$$

откуда можно вывести рекуррентно прогноз для $x_{T+\theta}$

$$\begin{aligned} x_{T+\theta}^P - b_1 x_{T+\theta-1}^P - \dots - b_{\theta-1} x_{T+1}^P - b_{\theta} x_T - \\ - b_{\theta+1} x_{T-1} - \dots = a' [z_{T+\theta} - b_1 z_{T+\theta-1} - \dots - b_{\theta} z_T - \dots]. \end{aligned}$$

Учитывая определение модели, можно заметить, что это равенство записывается также в виде:

$$\varepsilon_{T+\theta}^P = b_1 \varepsilon_{T+\theta-1}^P + \dots + b_{\theta-1} \varepsilon_{T+\theta}^P + b_{\theta} \varepsilon_T + b_{\theta+1} \varepsilon_{T-1} + \dots \quad (48)$$

Оно совпадает, таким образом, с рекуррентной формулой, предложенной для прогноза $\varepsilon_{T+\theta}$.

2. Если a оценивается по выборке и если характеристики процесса $\{\varepsilon_t\}$ априори известны (кроме, быть может, его дисперсии σ^2), то можно снова использовать линейное представление этого процесса и прийти к модели $u_t = a'w_t + \eta_t$ с некоррелированными ошибками.

Для минимизации среднеквадратической ошибки прогноза принимают:

$$u_{T+\theta}^P = \hat{a}' w_{T+\theta},$$

где \hat{a} — вектор регрессии наименьших квадратов для u_t относительно w_t .

Те же преобразования, что и выше, показывают, что такой прогноз эквивалентен прогнозу, определяемому формулой

$$x_{T+\theta}^P = \hat{a}' z_{T+\theta} + \hat{\varepsilon}_{T+\theta}^P, \quad (49)$$

в которой $\hat{\varepsilon}_{T+\theta}^P$ — «прогноз», вычисленный для последовательности остатков оценки $\hat{\varepsilon}_t$.

Дисперсия ошибок прогноза (49) легко вычисляется. Так как \hat{a} и $\hat{\varepsilon}_t$ не коррелированы, эта дисперсия есть сумма дисперсий для $\hat{a}' z_{T+\theta}$ и для $\hat{\varepsilon}_{T+\theta}^P$. Первая получается с помощью формул гл. 6, § 7, вторая — с помощью формул, данных в конце § 8, гл. 11.

3. Вообще, следует так же хорошо оценить по выборке характеристики процесса ошибок, как и вектор коэффициентов a . Как мы показали выше, проблема тогда гораздо сложнее. Хотя этот метод и не самый эффективный, на практике часто достаточно оценить a по методу наименьших квадратов, применив его непосредственно к x_t и z_t . Пусть a^* — полученный вектор и ε_t^* — оценки остатков. По аналогии с формулами (46) и (49) естественно прогнозировать $x_{T+\theta}$ по формуле

$$x_{T+\theta}^P = a^{*'} z_{T+\theta} + \varepsilon_{T+\theta}^{*P}, \quad (50)$$

где $\varepsilon_{T+\theta}^{*P}$ вычисляется с помощью ε_t^* , ε_{t-1}^* согласно рекуррентной формуле (48). При неограниченном возрастании объема выборки прогноз стремится по вероятности к прогнозу (46) по крайней мере при некоторых довольно общих условиях.

Для вычисления этого прогноза нужно, очевидно, оценить характеристики процесса ошибок с помощью остатков ε_t^* . Можно рассмотреть, например, первые члены коррелограммы ε_t^* и выровнять их на авторегрессионном процессе малого порядка. При малой выборке возможно, что прогноз останется недостаточно точным. Чтобы знать порядок точности прогноза, можно оценить отдельно дисперсию $a^{*'} z_{T+\theta}$ и дисперсию $\varepsilon_{T+\theta}^{*P} - \varepsilon_{T+\theta}$.

Если говорить строго, дисперсия $x_{T+\theta}^P - x_{T+\theta}$ не является их суммой, так как a^* и ε_t^* коррелированы между собой. Однако отклонения между ε_t^* и ε_t и ошибки оценок для характеристик $\{\varepsilon_t\}$ обычно должны быть малы по сравнению с дисперсией для ε_t .

ГЛАВА 14. АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

1. Эндогенные переменные с запаздыванием в экономических моделях

При объяснении поведения переменной в течение некоторого периода часто используют значения той же величины в предыдущие периоды. Например, как уже отмечалось в гл. 4, часто принимают, что потребление в течение года изменяется не только в соответствии с величиной наличных доходов в течение данного года, но также в зависимости от уровня потребления, уже достигнутого в предыдущем году.

Вот почему экономические модели, кроме текущих значений эндогенных переменных, часто содержат значения некоторых из этих переменных, которые они принимали в предыдущие периоды. Говорят, что такие модели содержат *запаздывающие эндогенные переменные*. Последние наряду с экзогенными переменными участвуют в определении собственно эндогенных переменных. Для обозначения как экзогенных, так и эндогенных переменных с запаздыванием употребляют еще выражение «предопределенные переменные».

В гл. 4 говорилось о тех преимуществах, которые может дать введение эндогенных переменных с запаздыванием. Но до сих пор мы рассматривали лишь модели, в которые такие переменные не входили. Теперь необходимо восполнить этот пробел.

По существу, модели с запаздывающими эндогенными переменными не требуют новых методов оценки. Метод наименьших квадратов и его различные варианты применяются без изменений. Но их статистические свойства становятся гораздо менее сильными¹.

¹ Впрочем, различие между моделями регрессии и авторегрессионными моделями исчезает в байесовой теории. Апостериорные законы распределения неизвестных параметров получаются одним и тем же способом с помощью априорных законов и функций правдоподобия, которые могут иметь совершенно одинаковую форму в обоих типах моделей. Изложенные в гл. 6, § 11 методы применяются, таким образом, непосредственно к авторегрессионным моделям с нормальным распределением ошибок.

В самом деле, основные гипотезы, которыми мы пользовались при доказательстве общих теорем второй части, не выполняются. Ограничимся случаем одного линейного уравнения:

$$x_t = a' z_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где вектор z_t экзогенных переменных рассматривается как неслучайный. Установим зависимость вида:

$$x_t = b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_h x_{t-h} + a' z_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Теперь уже нельзя предполагать, что $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-h}$ неслучайны, поскольку они определены посредством случайных величин $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-h}$.

Необходимо заметить, что если z_t действительно случайная величина, то все наши результаты приложимы к условным распределениям, для которых последовательность z_t по условию должна принимать значения, действительно наблюдаемые в выборке. (Например, среднеквадратические отклонения оценок a_j^* будут условными, так как их величина зависит от значений z_t .) Однако мы не можем становиться на подобную точку зрения. В данном случае она оказывается совершенно бесплодной. Если последовательность x_t по условию должна принимать действительно наблюдаемые значения, то в модели не остается никакой случайности и нельзя более говорить о статистических свойствах оценок.

Можно попытаться решить соотношения (2) относительно x_t , чтобы выразить эту переменную в функции некоторых исходных значений ($x_0, x_{-1}, \dots, x_{1-h}$), а также как функцию последовательностей z_t и ε_t . Но это сильно усложнило бы изложение. Более того, после такого решения члены ξ_t , соответствующие действию на x_t случайных ошибок ($\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_1$), следовали бы сложному закону распределения, в который b_1, b_2, \dots, b_h входили бы как параметры. Если бы справедливые для ε_t гипотезы были более просты, то гипотезы для ξ_t были бы очень сложными. Рассматривавшиеся до сих пор методы с трудом применялись бы к упомянутой разрешенной форме; их статистические свойства были бы неудовлетворительными¹.

Уравнение (2) напоминает уравнение, введенное при определении линейных авторегрессионных процессов. Разница состоит лишь в добавлении члена $a' z_t$. Вот почему *авторегрессионными моделями* будут называться те, в которых фигурируют эндогенные переменные с запаздыванием.

Последовательность $\{x_t\}$ эндогенных переменных можно, очевидно, рассматривать как случайный процесс, являющийся решением уравнения в конечных разностях (2). Обычно принимается, что процесс ошибок $\{\varepsilon_t\}$ стационарен. Присутствие члена $a' z_t$ показывает, что

¹ В следующей главе будет показано, что это решение ведет к модели с распределенными запаздываниями. Тогда будут понятнее трудности выдвинутого здесь предположения.

процесс $\{x_t\}$, вообще говоря, не стационарен. Но статистические свойства процесса $\{x_t\}$ существенно изменяются в зависимости от того, сходится или нет решение (2) к стационарному процессу при тождественно равной нулю последовательности z_t . Всегда будет предполагаться, что имеет место первый случай. Иначе говоря, мы принимаем, что h корней уравнения относительно u :

$$u^h - b_1 u^{h-1} - b_2 u^{h-2} - \dots - b_h = 0 \quad (3)$$

имеют модули, меньшие 1 (см. гл. 11, § 6).

Насколько, на самом деле, это *условие устойчивости* важно для экономических моделей вида (2)? Если бы один (или несколько) корней уравнения (3) были по модулю равны или больше 1, то последовательность $\{x_t\}$ следовала бы взрывной эволюции (кроме того случая, когда z_t , ε_t и начальные условия принимают некоторые исключительные значения). Модель описывала бы, таким образом, взрывное явление, в котором колебания экзогенных переменных z_t и ошибок ε_t отражаются, усиливаясь, на всю будущую последовательность эндогенных переменных. В действительности, очевидно, так никогда не бывает.

Впрочем, принимаемое в этой главе условие не разделяется безоговорочно всеми экономистами. Одни считают, что конъюнктурные флуктуации экономической активности лишь отражают флуктуации некоторых экзогенных величин, следуя естественно затухающему процессу. В этом случае можно довольствоваться моделью вида (2), удовлетворяющей условию устойчивости. Другие считают, что экономическая система существенно нестабильна, и любые начальные случайные возмущения стремятся усилиться, так что лишь наличие «препятствий», «потолка» или «пола», тормозят эти взрывные тенденции. Хорошая модель должна быть тогда неустойчивой вблизи своего положения равновесия и описывать препятствия, останавливающие эволюцию. При этом она обязательно будет нелинейной.

Данная работа ограничивается рассмотрением устойчивых линейных моделей. Это объясняется не столько теоретической позицией, сколько отсутствием серьезных исследований статистических проблем оценки в нелинейных моделях с неустойчивостью описанного выше типа (некоторые первичные результаты для очень простой взрывной модели получили Г. Рубин [266] и Т. Андерсон [12]).

В этой главе изучаются лишь модели с одним уравнением. Непосредственное рассмотрение моделей с несколькими уравнениями не представляет принципиальной трудности, но, не давая реальных преимуществ, оно сильно усложняет изложение.

2. Асимптотические свойства метода наименьших квадратов

Рассмотрим вначале случай, когда нет никакой связи между ошибками ε_t для различных наблюдений. Для простоты мы ограничимся примером. Обобщение полученных результатов мы приведем без доказательства.

1) Обсуждение примера

Рассмотрим модель:

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

в которой a и b — два подлежащих оценке числовых коэффициента, z_t — наблюдаемая экзогенная переменная и ε_t — ненаблюдаемая случайная величина, подчиняющаяся двум обычным гипотезам: ε_t независимы между собой и имеют одинаковое распределение с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией σ^2 .

Изучим свойства оценок a^* и b^* , полученных методом наименьших квадратов, т. е. с помощью решения системы

$$\left. \begin{aligned} b^* [x_{-1}^2] + a^* [zx_{-1}] &= [xx_{-1}], \\ b^* [x_{-1}z] + a^* [z^2] &= [xz]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В системе (5) скобки означают эмпирические моменты, равные:

$$[x_{-1}^2] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-1}^2; \quad [zx_{-1}] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t x_{t-1} \quad (6)$$

(здесь предполагается, что значение x_0 величины x_t для $t = 0$ известно, но эта гипотеза не имеет никакого значения для асимптотического исследования).

Вид системы (5) показывает, что a^* и b^* являются нелинейными функциями случайных величин x_t . В этом заключается их фундаментальное отличие от оценок такой же природы для обычных регрессий без эндогенных переменных с запаздыванием. Свойства a^* и b^* нельзя вывести из общей теории линейного выравнивания. Например, их математические ожидания трудно вычислить, и они зависят от точной формы, которую имеет распределение ε_t .

§ Модель (4) непосредственно влечет за собой следующие зависимости между эмпирическими моментами и истинными значениями a и b :

$$\left. \begin{aligned} b[x_{-1}^2] + a[zx_{-1}] + [\varepsilon x_{-1}] &= [xx_{-1}], \\ b[x_{-1}z] + a[z^2] + [\varepsilon z] &= [xz]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(Для получения первого уравнения достаточно уравнение (4) умножить на x_{t-1} , просуммировать по t и разделить на T .) Из систем (5) и (7) получим:

$$\left. \begin{aligned} (b^* - b)[x_{-1}^2] + (a^* - a)[zx_{-1}] &= [\varepsilon x_{-1}], \\ (b^* - b)[x_{-1}z] + (a^* - a)[z^2] &= [\varepsilon z]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Асимптотические свойства $(a^* - a)$ и $(b^* - b)$ вытекают из асимптотических свойств $[\varepsilon x_{-1}]$ и $[\varepsilon z]$, коль скоро матрица

$$M = \begin{bmatrix} [x_{-1}^2] & [zx_{-1}] \\ [x_{-1}z] & [z^2] \end{bmatrix}$$

стремится по вероятности к невырожденной матрице, что мы и должны установить.

Из уравнения (4) не следует непосредственно вид зависимости x_t от экзогенных элементов модели: переменных z_t и случайных ошибок ε_t . Для изучения же вероятностных свойств a^* и b^* нам нужно явное выражение для этой зависимости. Очевидно, можно записать:

$$x_{t-1} = bx_{t-2} + az_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

и подставить эту величину в (4). Таким образом, получаем:

$$x_t = b^2 x_{t-2} + az_t + abz_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}.$$

Тем же способом можно исключить x_{t-2} и, действуя последовательно, находим:

$$x_t = b^t x_0 + a \sum_{\tau=0}^{t-1} b^\tau z_{t-\tau} + \sum_{\tau=0}^{t-1} b^\tau \varepsilon_{t-\tau},$$

что можно записать в следующем виде:

$$x_t = b^t x_0 + ay_t + \zeta_t \quad (10)$$

с

$$y_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} b^\tau z_{t-\tau} \quad \zeta_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} b^\tau \varepsilon_{t-\tau}. \quad (11)$$

Выражение (10) упрощает изучение асимптотического поведения различных эмпирических моментов, фигурирующих в системе (8). Мы примем следующие три гипотезы, кроме уже сделанных по поводу ошибок ε_t .

а) Число b меньше 1 по абсолютной величине: это — упомянутая ранее гипотеза устойчивости.

б) Величины z_t ограничены числом B ($|z_t| \leq B$) и величины

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t z_{t+\tau} \quad (12)$$

стремятся к пределам γ_z^τ при неограниченном возрастании T , причем равномерно относительно τ ; предел $\gamma_z^0 = S_z^0$ положителен.

в) Распределение ε_t имеет конечный момент четвертого порядка.

Если эти гипотезы выполнены, то y_t ограничены числом $B/(1-b)$. Более того, эмпирическая дисперсия

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t^2$$

имеет конечный предел, который обозначим S_y^2 . Можно проверить, что

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t^2 = \sum_{\tau=0}^{T-1} b^{2\tau} \sum_{\theta=-\tau}^{T-\tau} b^\theta \left(\frac{1}{T} \sum_{t'=t_0+1}^{T-\tau} z_{t'} z_{t'-\theta} \right) \quad (13)$$

(где t_0 — максимум 0 и θ).

Для данных значений θ и τ последний член этого выражения имеет предел, равный γ_z^θ . Сходимость равномерна относительно θ и τ . Ряд с общим членом $b^\theta \gamma_z^\theta$ мажорируется сходящимся рядом $b^\theta \gamma_z^0$, так что выражение (13) имеет предел.

Теперь можно установить, что матрица M стремится по вероятности к пределу. Рассмотрим ее наиболее сложный элемент $[x_{-1}^2]$. Путем сопоставления формул (6) и (10) можно записать этот элемент как сумму шести членов.

Первые два:

$$\frac{x_0^2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} b^{2t} \quad \text{и} \quad \frac{2ax_0}{T} \sum_{t=0}^{T-1} b^t y_t$$

стремятся, очевидно, к нулю, так как входящие в них суммы ограничены соответственно величинами $\frac{1}{1-b}$ и $B/(1-b)^2$. (Если z_t не предполагаются ограниченными, то можно применить неравенство Шварца и заменить вторую границу на $\sqrt{TS_y/\sqrt{1-b^2}}$.)

Два члена:

$$\frac{2x_0}{T} \sum_{t=0}^{T-1} b^t \zeta_t \quad \text{и} \quad \frac{2a}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \zeta_t$$

можно записать соответственно в виде:

$$2x_0 \sum_{\tau=0}^{T-1} b^{2\tau} \cdot \frac{1}{T} \sum_{\theta=1}^{T-\tau} b^\theta \varepsilon_\theta \quad \text{и} \quad 2a \sum_{\tau=0}^{T-1} b^\tau \cdot \frac{1}{T} \sum_{\theta=1}^{T-\tau} y_{\theta+\tau} \varepsilon_\theta.$$

В каждом из этих двух выражений вторые члены имеют среднеквадратические отклонения, ограниченные соответственно величинами $\sigma/T\sqrt{1-b^2}$ и $\sigma B/(1-b)\sqrt{T}$, так что полные выражения имеют среднеквадратические отклонения, ограниченные величинами $2x_0\sigma/T(1-b^2)^{3/2}$ и $2a\sigma B/(1-b)^2\sqrt{T}$. (Если z_t не предполагать ограниченным, то последнюю границу можно заменить на $2a\sigma S_y/(1-b)\sqrt{T}$.) Эти две границы стремятся к нулю при неограниченно возрастающем T . Таким образом, эти два члена элемента $[x_{-1}^2]$ стремятся к нулю в среднеквадратическом.

Член

$$\frac{a^2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t^2$$

стремятся к S_y^2 , как мы уже видели.

Что касается члена

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \zeta_t^2, \quad (13a)$$

то воспользуемся выражением, аналогичным (13), где вместо z_t , $z_{t-\theta}$ надо подставить ε_t , $\varepsilon_{t-\theta}$. Математическое ожидание этого последнего

члена равно нулю, если $\theta \neq 0$, и σ^2 — в противоположном случае. Отсюда следует, что (13) имеет математическое ожидание $\sigma^2/(1 - b^2)$, которое мы обозначим через σ_ϵ^2 .

В развернутом виде математическое ожидание квадрата (13а) — сложное выражение, которое не будет здесь приведено. В него входят члены вида $E(\epsilon_{t'}, \epsilon_{t'-\theta}, \epsilon_{t''}, \epsilon_{t''-\theta'})$, которые равны нулю за исключением двух случаев: 1) если $\theta' = \theta \neq 0$ и $t'' = t'$, причем математическое ожидание равно σ^4 , 2) если $\theta' = \theta = 0$, причем математическое ожидание равно σ^4 , когда $t' \neq t''$, и равно μ_4 , моменту четвертого порядка ϵ_t , когда $t' = t''$. Но можно заметить, что сумма, в которой сгруппированы члены с μ_4 , стремится к нулю, когда неограниченно возрастает T , и что сумма, в которой сгруппированы члены с σ^4 , стремится к $\sigma^4/(1 - b^2)^2$, т. е. к σ_ϵ^2 . Итак, математическое ожидание квадрата (13а) стремится к квадрату предела математического ожидания этого члена. Иначе говоря, дисперсия (13а) стремится к нулю и сходится к своему математическому ожиданию σ_ϵ^2 .

Итак, мы убеждаемся, что $[x_{-1}^2]$ стремится к $a^2 S_y^2 + \sigma_\epsilon^2$. Подобным же образом можно установить, что $[zx_{-1}]$ имеет предел $a S_{yz}$, равный произведению a на предел

$$\frac{1}{T} \sum_t y_t z_t.$$

Итак, матрица M имеет предел:

$$\begin{bmatrix} a^2 S_y^2 + \sigma_\epsilon^2 & a S_{yz} \\ a S_{yz} & S_z^2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Это невырожденная матрица, так как

$$\sigma_\epsilon^2 > 0 \quad \text{и} \quad \overline{S_y^2 S_z^2} \geq S_{yz}^2$$

в силу неравенства Шварца.

Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что правые части $[\epsilon x_{-1}]$ и $[\epsilon z]$ из (8) стремятся к нулю. Отсюда следует, что a^* и b^* являются сходящимися оценками¹ для a и b . Чтобы установить, что пара величин $\sqrt{T}(a^* - a)$ и $\sqrt{T}(b^* - b)$ подчинена предельному нормальному закону, надо показать, что ему подчинена пара

$$\sqrt{T}[\epsilon x_{-1}], \quad \sqrt{T}[\epsilon z].$$

¹ Можно заметить, что сходимость устанавливается, даже если z_t не ограничено. Условие устойчивости $|b| < 1$ послужило в предшествующем доказательстве для установления стремления некоторых выражений к пределам. При несоблюдении этого условия некоторые элементы неограниченно возрастают. Эта взрывная тенденция должна быть, по-видимому, более явной для элементов матрицы M , чем для правых частей (8). Эта тенденция вовсе не ухудшает сходимости оценок a^* и b^* , она должна, наоборот, ее улучшить.

В самом деле, Дж. Сарган [268] сумел обойтись без условия устойчивости при доказательстве сходимости оценок по методу наименьших квадратов авторегрессионной модели к истинным значениям.

Рассмотрим, например, $\sqrt{T} [\epsilon x_{-1}]$, что можно записать, в силу (10), как сумму трех следующих членов (14а), (14б) и (14в):

$$\frac{x_0}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-1} b^t \epsilon_{t+1}, \quad (14a)$$

который стремится, очевидно, к нулю, так как входящая в него сумма имеет конечную дисперсию;

$$\frac{a}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \epsilon_{t+1}, \quad (14б)$$

который имеет предельный нормальный закон, так как y_t ограничены, а ϵ_t независимы друг от друга и имеют дисперсию;

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-1} \zeta_t \epsilon_{t+1}, \quad (14в)$$

который является линейной комбинацией выражений вида:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \epsilon_{t-\tau} \epsilon_{t+1}. \quad (14г)$$

Каждый из членов (14з), несомненно, имеет нормальный предельный закон, так как $\epsilon_{t-\tau} \epsilon_{t+1}$ имеет конечный момент второго порядка, равный σ^4 . Однако (14в) — сумма членов, не являющихся независимыми ни между собой, ни от (14б). Необходим, следовательно, тщательный анализ, чтобы установить для сумм (14б) и (14в) наличие предельного нормального закона (см. [274]). Отсюда следует, в конце концов, что пара $\sqrt{T} (a^* - a)$ и $\sqrt{T} (b^* - b)$ имеет предельный нормальный закон.

Для определения матрицы асимптотических ковариаций для $\sqrt{T} (a^* - a)$, $\sqrt{T} (b^* - b)$ рассмотрим, в частности, предел $TE \{[\epsilon x_{-1}]^2\}$. Соответствующее математическое ожидание можно записать в виде:

$$E \left[\frac{1}{T^2} \sum_{tt'} \epsilon_t \epsilon_{t'} x_{t-1} x_{t'-1} \right]. \quad (15)$$

Все члены, для которых $t \neq t'$, имеют нулевое математическое ожидание. В самом деле, ϵ_t тогда не зависит от $\epsilon_{t'}$ и от x_{t-1} ; чтобы член с t, t' не имел нулевого математического ожидания, нужно, чтобы ϵ_t было связано с $x_{t'-1}$, что дает условие $t \leq t' - 1$; но тогда $t' > t - 1$ и $\epsilon_{t'}$ не зависит от $\epsilon_t, x_{t'-1}, x_{t-1}$. Таким образом, сумма в выражении (15) содержит лишь члены, для которых $t = t'$; ее можно тогда записать в виде:

$$\frac{\sigma^2}{T} E \{[x_{-1}]^2\}.$$

Предел $TE \{[\epsilon x_{-1}]^2\}$ равен, следовательно, произведению σ^2 на предел $[x_{-1}]^2$.

Таким же образом устанавливается, что предел матрицы ковариаций пары $\sqrt{T}[\varepsilon x_{-1}]$ и $\sqrt{T}[\varepsilon z]$ равен произведению σ^2 на предел матрицы M . Итак, матрица асимптотических ковариаций пары $\sqrt{T}(b^* - b)$, $\sqrt{T}(a^* - a)$ равна

$$\sigma^2 [\lim M]^{-1}. \quad (16)$$

Формула (16) идентична применяемой в теории линейных регрессий. Единственная разница заключается в том, что она справедлива асимптотически, а не для малых выборок.

Полученные результаты не относятся лишь к модели (4). Это следует из общей теории, основные выводы которой приведены дальше.

2) Общие теоремы

Вначале приведем используемые гипотезы.

Гипотеза 1. Случайные векторы ε_t распределены по одному и тому же закону с нулевым математическим ожиданием и имеют конечные моменты до четвертого порядка. Две ошибки ε_t и ε_θ независимы по вероятности, если t и θ неравны.

Гипотеза 2. Случайная ошибка ε_t распределена нормально.

Гипотеза 3. Все h корней уравнения (3) по модулю меньше 1.

Гипотеза 4. Когда T неограниченно возрастает, z_t ограничены и каждая из матриц

$$M_{zz}^\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t z'_{t+\tau}$$

стремится к пределу M_0^τ (с $\tau = 0, 1, 2, \dots$). Сходимость равномерна относительно τ . Матрица M_0^τ не вырождена.

Эти гипотезы без учета условия устойчивости и сходимости матриц M_{zz}^τ напоминают гипотезы, сформулированные в начале гл. 6 и 9.

Если ε_t удовлетворяют гипотезам 1 и 2, то закон распределения вероятностей для $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)$ имеет плотность

$$C \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right\},$$

где C — соответствующая постоянная и σ^2 — дисперсия ε_t . Условный закон распределения вероятностей для (x_1, x_2, \dots, x_T) для данных начальных значений $(x_{1-h}, \dots, x_{-1}, x_0)$ (и для данных z_t , если z_t случайная величина) имеет плотность

$$C \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (x_t - b_1 x_{t-1} - b_2 x_{t-2} - \dots - b_h x_{t-h} - a' z_t)^2 \right\}. \quad (17)$$

В самом деле, так как матрица линейного преобразования (x_1, x_2, \dots, x_T) в $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)$ имеет лишь члены, равные 1 на главной диагонали и нули выше нее, то якобиан преобразования равен 1.

Формула (17) для плотности вероятности показывает, что оценка максимального правдоподобия параметров b_1, b_2, \dots, b_h и a определяется значениями этих параметров, минимизирующих сумму квадратов отклонений:

$$\sum_{t=1}^T (x_t - b_1 x_{t-1} - b_2 x_{t-2} - \dots - b_h x_{t-h} - a' z_t)^2.$$

Но это — оценка по методу наименьших квадратов, вычисленная так, как если бы запаздывающие эндогенные переменные были экзогенными.

Метод максимума правдоподобия подтверждается тем, что полученные с его помощью оценки сходятся и асимптотически наиболее эффективны. Но в действительности обычные доказательства применяются лишь в случае выборок из независимых наблюдений. В данном же случае x_t не независимы между собой. Тем не менее можно доказать¹, что справедлива:

Теорема 1. Если гипотезы 1, 2, 3 и 4 удовлетворяются, оценки $b_1^*, b_2^*, \dots, b_h^*, a^*$ сходятся по вероятности к истинным значениям при неограниченном возрастании числа наблюдений T . Индикаторный асимптотический эллипсоид для

$$\sqrt{T}(b_1^* - b_1), \sqrt{T}(b_2^* - b_2), \dots, \sqrt{T}(b_h^* - b_h), \sqrt{T}(a^* - a)$$

содержится в таковом для любой другой регулярной сходящейся оценки.

Мы неоднократно видели, что нет серьезной причины предполагать нормальность ошибок, влияющих на экономическую модель. Поэтому особенно интересна следующая теорема:

Теорема 2. Если гипотезы 1, 3 и 4 удовлетворяются, оценки $b_1^*, b_2^*, \dots, b_h^*, a^*$ сходятся по вероятности к истинным значениям, когда T неограниченно возрастает. Асимптотически $\sqrt{T}(b_1^* - b_1), \dots, \sqrt{T}(b_h^* - b_h), \sqrt{T}(a^* - a)$ распределены по нормальному закону, матрицу ковариаций которого можно записать в виде $\sigma^2 N^{-1}$, где

$$N = \begin{bmatrix} \overline{M}_{xx} & \overline{M}_{x0} \\ \overline{M}'_{x0} & M_0^0 \end{bmatrix}.$$

В этом выражении M_0^0 определено гипотезой 4, \overline{M}_{xx} — матрица порядка h , элементы которой являются пределами по вероятности выражения:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-\theta} x_{t-\theta'}; \quad \theta, \theta' = 1, 2, \dots, h.$$

¹ Мы не приводим здесь общие доказательства теорем 1 и 2. Они довольно громоздки. Интересующийся читатель может посмотреть работы [212], [182], [127, гл. 3, § 7], [274]. В [80] дано изящное доказательство асимптотической эффективности выравнивания по методу наименьших квадратов.

\overline{M}_x — матрица порядка $(h \times m)$, элементы которой являются пределами по вероятности выражения:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-\theta} z_{jt}; \quad \theta = 1, 2, \dots, h; j = 1, 2, \dots, m.$$

Эта теорема показывает, что если выполнены гипотезы 1, 3 и 4, то можно применять метод наименьших квадратов, как если бы запаздывающие эндогенные переменные были экзогенными. Вычисляют b_{θ}^* и a^* , решая нормальные уравнения, аналогичные уравнениям гл. 6; оценивают σ^2 с помощью остатков ε_t^* (так как последние стремятся по вероятности к ошибкам ε_t); дисперсии и ковариации b_{θ}^* и a^* оцениваются произведением σ^{*2}/T на матрицу, обратную матрице M , построенную для множества предопределенных переменных (так как эта матрица является сходящейся оценкой для N); устанавливаются критерии или доверительные области с помощью обычных методов для нормальных случайных величин (так как асимптотическое распределение оценок нормально).

Однако этот метод можно обосновать лишь асимптотически. Теория гл. 6 не зависит от объема рассматриваемой выборки, а только что изложенная теория предполагает этот объем достаточным для применимости асимптотического приближения. Уже в этом смысле свойства метода наименьших квадратов в авторегрессионных моделях слабее, чем в моделях регрессии.

3) Индуктивные методы определения авторегрессионной формы стационарного процесса¹

Прежде чем дальше изучать модель (2), мы можем остановиться на близком вопросе статистического анализа стационарных случайных процессов.

Как уже указывалось в гл. 11, авторегрессионное представление процесса особенно полезно для прогноза будущей эволюции всей реализации. Но стоящие перед экономистом проблемы являются в основном проблемами прогноза. Речь всегда идет о том, чтобы знать, как будущее зависит от наблюдаемых сегодня фактов. Более того, модели часто сами имеют авторегрессионную форму. Желая рассмотреть случайный процесс, экономист обычно использует статистические методы, задуманные для применения к авторегрессионному представлению:

$$x_t - b_1 x_{t-1} - b_2 x_{t-2} - \dots - b_\tau x_{t-\tau} - \dots = \varepsilon_t. \quad (18)$$

В самом деле, любая более частная гипотеза относительно процесса приводит либо к соотношению для величин b_τ , либо к гипотезе о природе распределения ε_t . В экономике редко интересуются свойствами распределения ε_t , если они косвенным образом не используются в критериях или для прогнозов; чаще всего удовлетворяются оценкой дисперсии ε_t . Наиболее часто гипотезы касаются коэффициентов b_τ .

¹ Дальнейшие детали по теме этого параграфа можно найти в [325] и [320], [321].

Мы примем здесь, что эти коэффициенты зависят от конечного числа неизвестных параметров, которые мы представим вектором α . Существенная разница по сравнению с рассмотренным ранее случаем заключается в том, что b_τ являются не параметрами, которые нужно оценить, а функциями этих параметров. Эта ситуация напоминает рассмотренную в гл. 9.

Временной ряд (реализация процесса $\{x_t\}$ для $t = 1, 2, \dots, T$) должен допускать оценку величины или критериев для этой величины. Рассмотрим выражение

$$V = \sum_{t=\theta+1}^T (x_t - b_1 x_{t-1} - \dots - b_\theta x_{t-\theta})^2, \quad (19)$$

в котором θ является фиксированной заранее величиной. Если не учитывать, что в разложении (18) опущены члены с $\tau > \theta$, то V равно сумме квадратов ошибок для t , изменяющегося от $\theta + 1$ до T . Естественной оценкой будет та, которая минимизирует V ; пусть α_θ^* — эта оценка. Если θ — фиксированная доля T (и возрастающая, таким образом, вместе с T), то с помощью некоторых общих гипотез можно показать, что α_θ^* сходится к истинному значению α при неограниченном возрастании числа наблюдений.

Этот принцип особенно просто применяется для авторегрессионного процесса, так как тогда представление (18) включает лишь конечное число b_τ , причем все их можно учесть при вычислении V (по крайней мере при достаточном числе наблюдений).

Аналогичный принцип можно применить и для критериев. Примем, что b_τ зависят от n параметров и гипотеза H_0 уточняет, что m из этих параметров равны нулю. Пусть тогда соответственно V^* и V_0^* — значения минимума V относительно n и $n - m$ параметров, не фигурирующих в H_0 . Отношение между V_0^* и V^* может служить критерием для гипотезы H_0 . Если θ — постоянная доля T , то можно показать, что асимптотически

$$(T-n) \left[\frac{V_0^*}{V^*} - 1 \right]$$

распределено по закону χ^2 с m степенями свободы.

Прежде чем закончить рассмотрение этого вопроса, заметим еще, что оценка авторегрессионного процесса, в котором b_τ сами являются неизвестными параметрами, находится почти полностью путем идентификации первых членов эмпирической коррелограммы с соответствующими членами теоретической коррелограммы. Чтобы это показать, рассмотрим авторегрессионный процесс третьего порядка:

$$x_t = b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + b_3 x_{t-3} + \varepsilon_t.$$

Умножая сначала на x_{t-1} , затем на x_{t-2} и, наконец, на x_{t-3} и взяв математические ожидания, получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 \rho_1 + b_3 \rho_2 &= \rho_1, \\ b_1 \rho_1 + b_2 + b_3 \rho_1 &= \rho_2, \\ b_1 \rho_2 + b_2 \rho_1 + b_3 &= \rho_3, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 — три первых члена теоретической коррелограммы $\{x_t\}$.

Нормальные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} b_1 \sum x_{t-1}^2 + b_2 \sum x_{t-1} x_{t-2} + b_3 \sum x_{t-1} x_{t-3} &= \sum x_t x_{t-1}, \\ b_1 \sum x_{t-1} x_{t-2} + b_2 \sum x_{t-2}^2 + b_3 \sum x_{t-2} x_{t-3} &= \sum x_t x_{t-2}, \\ b_1 \sum x_{t-1} x_{t-3} + b_2 \sum x_{t-2} x_{t-3} + b_3 \sum x_{t-3}^2 &= \sum x_t x_{t-3}. \end{aligned} \right\}$$

Если не учитывать крайних членов сумм, эта система сводится к предыдущей с помощью подстановки эмпирических коэффициентов:

$$r_1 = \frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2}, \quad r_2 = \frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2}, \quad r_3 = \frac{\sum x_t x_{t-3}}{\sum x_t^2}$$

вместо теоретических коэффициентов ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 .

Дж. Дарбин [78] дал простой итеративный метод для определения оценок b_τ^* , удовлетворяющих системам вида (20), взятым с эмпирическими коэффициентами r_τ .

3. Выравнивание по методу наименьших квадратов в малых выборках

В эконометрии часто используют короткие статистические ряды, содержащие, например, всего 20 последовательных наблюдений. Именно поэтому интересно более точно изучить распределение оценок наименьших квадратов для малых выборок. К сожалению, эти распределения очень сложны. Установить их удастся лишь в очень частных случаях.

Следует уточнять, рассматриваются ли условные распределения для фиксированных начальных значений $x_{1-h}, x_{2-h}, \dots, x_{-1}, x_0$ или безусловные распределения, учитывающие, что эти значения сами являются случайными. Асимптотически оба вида распределений эквивалентны, но отличаются для малых выборок.

Рассмотрим, например, простую модель:

$$x_t = b x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{при } |b| < 1. \quad (21)$$

Метод наименьших квадратов приводит к оценке b для b^* :

$$b^* = \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}, \quad (22)$$

т. е. с помощью первого коэффициента эмпирической коррелограммы, определенного в соответствии с формулой (3) гл. 12. Как мы уже заметили, эта формула не является симметричной («круговой»). Л. Гурвиц [155] тем не менее изучил распределение b^* и показал существование *систематической ошибки* в малых выборках. Когда процесс x_t рассматривается как стационарный и начальное значение x_0 — как случайное,

когда b мало по абсолютной величине и T велико, тогда математическое ожидание b^* дается в первом порядке относительно величин b и $1/T$ формулой

$$E(b^*) \sim b \left(1 - \frac{2}{T}\right).$$

Разумеется, при неограниченном возрастании T систематическая ошибка $-2b/T$ бесконечно мала относительно среднеквадратической ошибки b^* , равной

$$\sqrt{\frac{1-b^2}{T}}.$$

Для выборок, содержащих около 20 наблюдений, она достигает примерно 10% истинной величины¹.

Чтобы хорошо оценить свойства обычных методов, когда аналитический подход затруднителен, приходится прибегать к изучению экспериментальных результатов. Исходя из известной авторегрессионной модели

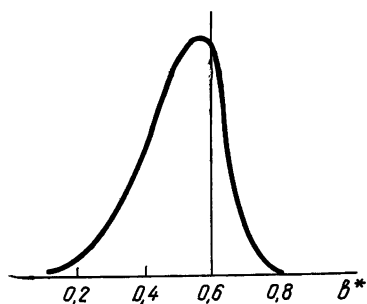


Рис. 1

достаточно сформировать некоторое число искусственных выборок с одними и теми же вероятностными характеристиками и найти оценки для каждой из них, предполагая, что в действительности мы имеем дело лишь с различными реализациями одной выборки. Тогда для каждой оценки мы будем располагать столькими значениями, сколько имеется выборок. Эмпирическое распределение этих значений дает приближение к теоретическому закону, который мы хотели установить. Этот метод называется «методом Монте-Карло». К обсуждаемой проблеме он был применен в работах [50], [51] и [207].

В статье Э. Маленво [207] изучаемая модель содержит одну эндогенную переменную с запаздыванием, одну экзогенную переменную и постоянный член, т. е.

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + c + \varepsilon_t. \quad (23)$$

Искусственные выборки из двадцати наблюдений каждая приводит к оценке b^* для b , плотность распределения которой приближенно представлена на рис. 1. Истинное значение b равно 0,60. Можно констатировать, что b^* занижает оценку b в трех случаях из четырех и что распределение явно асимметрично с существенным отклонением в направлении малых значений b . Смещение $E(b^* - b)$ имеет порядок 0,08.

Изучение искусственных выборок допускает также оценку статистических методов, связанных с методом наименьших квадратов. Асимптотическая теория обосновывает применение обычных формул для

¹ Распределение оценки b^* было изучено с помощью метода Монте-Карло Дж. Копасом [53] для нормального процесса вида (21). Этот автор сравнивал b^* с другими оценками.

вычисления дисперсий оценок и для установления критериев и доверительных областей. Но эти формулы применимы строго лишь для больших выборок. Поэтому важно установить, ведут ли они к заметным ошибкам для выборок, которые обычно изучаются в эконометрии.

С этой точки зрения, из анализа методом Монте-Карло для модели (8) можно сделать два достаточно общих вывода.

(а) Обычная формула для вычисления σ_b^{*2} дает в среднем достаточно точную оценку дисперсии оценки b^* , но имеет тенденцию слегка занижать среднеквадратическое отклонение относительно истинного значения b , т. е. $E(b^* - b)^2$. Для рассматриваемых выборок σ_b^{*2} занижает оценку $E(b^* - b)^2$ примерно в трех случаях из четырех.

(б) Доверительный интервал, определенный неравенством

$$|b^* - b| \leq 2,11\sigma_b^*$$

согласно общей теории должен содержать истинное значение в 95% случаев, находится справа — в 2,5% случаев, слева — в 2,5% случаев (при 17 степенях свободы). В рассматриваемой модели ее действительный уровень значимости немного отличается от 5%. Точнее, интервал находится слева от истинного значения примерно в 7% случаев и справа — лишь в одном случае из 300.

В целом эти результаты подтверждают, что общая теория регрессий не применима как таковая к авторегрессионным моделям. Однако они наводят на мысль, что на практике применение методов обычной регрессии к авторегрессионным моделям не влечет за собой серьезной ошибки. Разумеется, это оптимистическое заключение справедливо лишь для случая неавтокоррелированных ошибок ε_t . Мы еще вернемся к этому вопросу.

4. Прогнозирование

Для изучения проблем прогноза с помощью авторегрессионной модели сначала предположим, что значения коэффициентов модели b_0 и a_j известны заранее.

Если модель не содержит экзогенной переменной и удовлетворяет условию устойчивости (гипотеза 3), если ошибки не автокоррелированы (гипотеза 1), то случайный процесс x_t можно считать стационарным, а его линейное представление — заданным моделью. Таким образом, прогноз делается как и для любого другого линейного стационарного процесса (см. гл. 11, § 8).

Наличие экзогенных переменных несколько не усложняет проблему. В самом деле, процесс x_t можно записать как сумму некоторой последовательности, зависящей от z_t и линейного стационарного процесса $\{\xi_t\}$. Прогноз для $x_{T+\theta}$ эквивалентен прогнозу для $\xi_{T+\theta}$. Чтобы это показать, достаточно взять для примера модель:

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + \varepsilon_t. \quad (24)$$

Мы примем без точного доказательства, что из модели (24) следует

$$x_t = aw_t + \xi_t, \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_t &= z_t + bz_{t-1} + b^2 z_{t-2} + \dots, \\ \xi_t &= \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + b^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(Тогда как (24) совпадает с (4), представление (25) отличается от представления (10) тем, что в w_t и в ξ_t входят все предшествующие значения z_t и ε_t , включая и те, которые предшествуют периоду наблюдения.)

Процесс $\{\xi_t\}$ удовлетворяет тогда соотношению:

$$\xi_t = b\xi_{t-1} + \varepsilon_t.$$

В силу результатов гл. 11, § 8 значение $x_{T+\theta}$, минимизирующее среднеквадратическое значение ошибки прогноза, будет иметь вид:

$$x_{T+\theta}^P = aw_{T+\theta} + \xi_{T+\theta}^P,$$

где

$$\xi_{T+\theta}^P = b\xi_{T+\theta-1}^P \text{ и } \xi_{T+1}^P = b\xi_T.$$

Этот прогноз записывается еще в виде:

$$x_{T+\theta}^P = b^\theta x_T + a(z_{T+\theta} + bz_{T+\theta-1} + \dots + b^{\theta-1} z_{T+1}).$$

В этом примере и вообще во всех авторегрессионных моделях, удовлетворяющих гипотезам 1 и 3, можно определить прогноз $x_{T+\theta}^P$ рекуррентно, с помощью линейной формулы, выведенной непосредственно из модели. В данном случае

$$\left. \begin{aligned} x_{T+1}^P &= bx_T + az_{T+1}, \\ x_{T+\theta}^P &= bx_{T+\theta-1}^P + az_{T+\theta} \text{ для } \theta = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Дисперсия ошибок прогноза удовлетворяет тем же формулам, что и в гл. 11, § 8. Например, в случае модели (24) получаем:

$$E(x_{T+\theta}^P - x_{T+\theta})^2 = (1 + b + \dots + b^{\theta-1}) \sigma_\varepsilon^2. \quad (28)$$

Предположим теперь, что коэффициенты авторегрессионной модели оценены по выборке и что сохранена гипотеза независимости последовательных ошибок.

Метод наименьших квадратов приводит к оценкам, которые до сих пор наиболее обоснованы. Поэтому естественно, как и выше, подставлять оценки вместо истинных значений коэффициентов. Так, в случае модели (24) можно обратиться к рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_{T+1}^P &= b^* x_T + a^* z_{T+1}, \\ x_{T+\theta}^P &= b^* x_{T+\theta-1}^P + a^* z_{T+\theta} \text{ для } \theta = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Если использованная выборка достаточно велика, то оценки для b^* и a^* будут мало отличаться от истинных значений b и a . Тогда можно вычислить дисперсию ошибки прогноза по формуле (28), пренебрегая разностью между b^* и b .

Наоборот, при «малой» выборке следует учитывать ошибки в оценках. К сожалению, очень трудно аналитически определить характеристики распределения и ошибки прогноза. Для иллюстрации достаточно рассмотреть простой случай:

$$x_t = bx_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Ошибка прогноза для x_{T+1} равна тогда

$$x_{T+1}^p - x_{T+1} = (b^* - b) x_T - \varepsilon_{T+1} = \frac{x_T \sum \varepsilon_t x_{t-1}}{\sum x_{t-1}^2} - \varepsilon_{T+1}.$$

Отношение, фигурирующее в этой формуле, очень сложно. Можно лишь заметить, что ошибка прогноза имеет нулевое математическое ожидание при симметричном распределении ε_t , хотя b^* и содержит симметрическую ошибку.

И здесь анализ искусственных выборок может в некоторой мере заменить аналитическое изучение. Так, выборки, построенные с помощью модели (23), позволили проверить, что ошибка прогноза имеет распределение, центрированное в окрестности нуля, и оценить величины ошибок оценки. В рассмотренных примерах оказалось, что для первого прогноза ($\theta = 1$) дисперсия ошибки превышает результат расчета по формуле (28) не больше чем на 20%; но начиная с третьего прогноза ($\theta = 3$) действительная величина дисперсии ошибки вдвое больше оценки по этой формуле. Дело обстоит так, как если бы неточность оценок кумулятивно влияла на последовательные значения прогнозов в противоположность тому, что наблюдалось для неавторегрессионной модели.

5. Зависимость ошибок и выравнивание методом наименьших квадратов

Использованная в предыдущем параграфе гипотеза 1 содержала условие, что не существует никакой случайной зависимости между ошибками ε_t и ε_{t+1} для двух последовательных периодов. Но мы уже указывали, что подобные зависимости встречаются в работе с экономическими данными. Таким образом, нужно изучить свойства предложенных методов при автокоррелированных ошибках.

Для изученных во второй части неавторегрессионных моделей зависимость ошибок не препятствует сходимости оценок, полученных по методу наименьших квадратов, к истинным значениям и на эти оценки не влияет систематическая ошибка даже при малых выборках. Как показано в предыдущей главе, нужно пересмотреть лишь формулы для среднеквадратических отклонений оценок.

Ситуация коренным образом меняется в случае авторегрессионных моделей. Систематическая ошибка, влияющая на оценки по методу наименьших квадратов, может стать очень существенной. Она не стремится к нулю при неограниченном возрастании числа наблюдений. Оценки сходятся к значениям, отличным от истинных.

В принципе может оказаться, что параметры модели не будут идентифицируемы (по крайней мере, если неизвестна очень точно зависимость ошибок). Рассмотрим, например, модель:

$$x_t = bx_{t-1} + \varepsilon_t \quad (30)$$

и предположим, что ошибки ε_t можно записать в виде:

$$\varepsilon_t = \eta_t + \alpha\eta_{t-1}, \quad (31)$$

где переменные η_t образуют чисто случайный стационарный процесс. (ε_t следуют тогда процессу «скользящих средних».) Предположим еще, что $\alpha = -b$. Соотношения (30) и (31) приводят к

$$x_t - \eta_t = b(x_{t-1} - \eta_{t-1}) = \dots = b^t(x_0 - \eta_0).$$

Так как $|b| < 1$, процесс $\{x_t\}$ стремится к чисто случайному процессу $\{\eta_t\}$, даже если отличался от него в начальный период. Закон распределения x_t тогда не зависит от b (за исключением, может быть, самых первых значений). Если процесс x_t действительно стационарен, то параметр b не идентифицируем, так как распределение x_t не зависит от него. Если оценивать b с помощью формулы (22), то получается значение, которое стремится по вероятности к нулю для любых b .

Этот случай может показаться искусственным. Для более точной оценки ситуации рассмотрим два простых примера, в которых ошибки следуют авторегрессионному процессу. Второй пример содержит экзогенную переменную, а первый — нет. Это представление подсказано представлением, которое дал Ц. Грilihес [128].

Первый пример. Пусть дана система:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= bx_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В ней первое уравнение определяет модель для наблюдаемой переменной x_t , а второе — уточняет закон ненаблюдаемых ошибок ε_t . Процесс η_t чисто случайный.

Исключая ε_t , систему можно записать в виде:

$$x_t = (b + \rho)x_{t-1} - b\rho x_{t-2} + \eta_t. \quad (33)$$

Чтобы оценить асимптотическое смещение для b^* , умножим (33) на x_{t-1} и просуммируем относительно t :

$$\sum x_t x_{t-1} = (b + \rho) \sum x_{t-1}^2 - b\rho \sum x_{t-1} x_{t-2} + \sum \eta_t x_{t-1}$$

или же

$$b^* = b + \rho - b\rho \frac{\sum x_{t-1} x_{t-2}}{\sum x_{t-1}^2} + \frac{\sum \eta_t x_{t-1}}{\sum x_{t-1}^2}.$$

При неограниченном возрастании числа наблюдений первое отношение имеет тот же предел по вероятности, что и b^* , а второе отношение стремится по вероятности к нулю. Предыдущее уравнение записывается, таким образом, в виде:

$$\lim b^* = b + \rho - b\rho \lim b^*,$$

откуда следует формула

$$\lim b^* = \frac{b + \rho}{1 + b\rho}. \quad (34)$$

Оценка b^* содержит, следовательно, систематическую ошибку, которая стремится к

$$\frac{\rho(1-b^2)}{1+b\rho}.$$

На рис. 2 изображены изменения $\lim b^*$ в функции от ρ для $b = 0,5$. Можно констатировать, что ошибка существенна даже для малых значений ρ . Формула (34) показывает, между прочим, что $\lim b^*$ изменяется между -1 и 1 , каково бы ни было b .

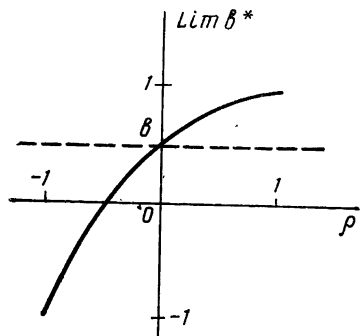


Рис. 2

Предположим еще, что, оценивая ρ , мы вычисляем первый коэффициент остаточной автокорреляции на ошибках оценки:

$$\varepsilon_t^* = x_t - b^* x_{t-1}.$$

Имеем:

$$\rho^* = \frac{\sum \varepsilon_t^* \varepsilon_{t-1}^*}{\sum \varepsilon_t^{*2}}.$$

По обычным формулам получаем:

$$\frac{1}{T} \sum \varepsilon_t^{*2} = \frac{1}{T} \sum x_t^2 - b^{*2} \cdot \frac{1}{T} \sum x_{t-1}^2.$$

Но $(1/T) \sum x_t^2$ стремится по вероятности к дисперсии x_t , равной σ_x^2 , так как линейный процесс, определенный в (16), эргодичен. Итак, $(1/T) \sum \varepsilon_t^{*2}$ стремится к $(1 - b^{*2}) \sigma_x^2$.

Аналогично в силу определений b^* и ε_t^* получаем:

$$\frac{1}{T} \sum \varepsilon_t^* \varepsilon_{t-1}^* = -b^* \cdot \frac{1}{T} \sum x_t x_{t-2} + b^{*2} \cdot \frac{1}{T} \sum x_{t-1} x_{t-2}.$$

Умножая соотношение (33) на x_{t-2} , суммируя по t , вычитая

$$-b^* \cdot \frac{1}{T} \sum x_{t-1} x_{t-2}$$

и переходя к пределам по вероятности, видим, что предел выражения:

$$\frac{1}{T} \sum x_t x_{t-2} - b^* \cdot \frac{1}{T} \sum x_{t-1} x_{t-2}$$

равен пределу выражения:

$$[(b + \rho - b^*) b^* - \rho b] \sigma_x^2.$$

Итак, ρ^* ведет себя в пределе, как

$$\frac{-b^* [(b + \rho - b^*) b^* - \rho b]}{1 - b^{*2}}.$$

Откуда, наконец,

$$\lim \rho^* = \frac{\rho b(b + \rho)}{1 + b\rho}. \quad (35)$$

Из формул (34) и (35) следует:

$$\lim (b^* + \rho^*) = b + \rho.$$

Оценка ρ с помощью ρ^* содержит, следовательно, асимптотическое смещение, в точности противоположное таковому для оценки b через b^* . Рис. 3 дает изменения ρ^* в функции от ρ для $b = 0,5$. Можно констатировать, что ρ^* существенно занижает зависимость между ошибками.

Изучение этого примера ведет к двум заключениям. Во-первых, *зависимость ошибок может сильно смещать оценку параметров авторегрессионной модели*, когда эта оценка получена по методу наименьших квадратов. На полученные результаты могут влиять весьма существенные систематические ошибки. С другой стороны, *коэффициент автокорреляции остатков не дает корректно оценки для зависимости ошибок*. Он будет обычно мало отличаться от нуля, даже если зависимость достаточно сильна.

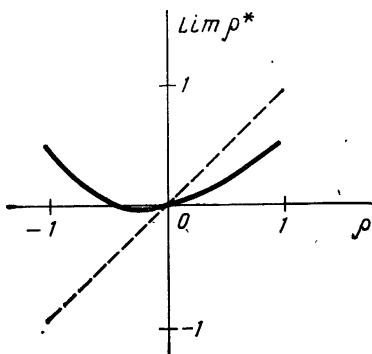


Рис. 3

Разумеется, этот пример несколько утрирован. Модель (32) не содержит экзогенных переменных. Следующий пример покажет, что их присутствие может существенно улучшить положение.

Второй пример. Пусть дана система:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= bx_{t-1} + az_t + c + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

с теми же определениями, что и для системы (32) с экзогенной переменной z_t и постоянным членом c . В соответствии с обычными гипотезами предположим, что η_t не зависит от z_0 .

Для упрощения формул используем те же обозначения для эмпирических моментов, что и в § 2 (а), так что, например, $[x \ x_{-1}]$ обозначает:

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x}_{-1}),$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad \text{и} \quad \bar{x}_{-1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-1}.$$

Обозначим также

$$M = \begin{bmatrix} [x_{-1}^2] & [x_{-1}z] \\ [x_{-1}z] & [z^2] \end{bmatrix}.$$

Примененный к первому уравнению (36) метод наименьших квадратов дает для b и a оценки b^* и a^* — решениями системы:

$$\begin{bmatrix} b^* \\ a^* \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} [xx_{-1}] \\ [xz] \end{bmatrix}.$$

Так как x_t удовлетворяет соотношениям (36), предыдущее равенство записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} b^* \\ a^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \rho M^{-1} \begin{bmatrix} [\varepsilon_{-1} x_{-1}] \\ [\varepsilon_{-1} z] \end{bmatrix} + M^{-1} \begin{bmatrix} [\eta x_{-1}] \\ [\eta z] \end{bmatrix}.$$

Когда число наблюдений неограниченно возрастает, последний вектор стремится по вероятности к нулю. Так что¹

$$\begin{bmatrix} b^* \\ a^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \rightarrow \rho \begin{bmatrix} \lambda_b \\ \lambda_a \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где λ_b и λ_a являются по определению коэффициентами регрессии наименьших квадратов для ε_{t-1} относительно x_{t-1} и z_t . Таким образом, достаточно изучить пределы по вероятности λ_b и λ_a , которые являются решениями системы:

$$\left. \begin{aligned} [x_{-1}^2] \lambda_b + [x_{-1}z] \lambda_a &= [\varepsilon_{-1} x_{-1}], \\ [x_{-1}z] \lambda_b + [z^2] \lambda_a &= [\varepsilon_{-1} z]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Прежде всего нетрудно доказать, что *введение экзогенной переменной z_t уменьшает абсолютную величину асимптотического смещения b^** . В самом деле, так как $[\varepsilon_{-1}z]$ стремится по вероятности к нулю, исключение λ_a из (38) приводит к соотношению:

$$\lambda_b \left\{ [x_{-1}^2] - \frac{[x_{-1}z]^2}{[z^2]} \right\} \rightarrow [\varepsilon_{-1} x_{-1}]. \quad (39)$$

Введем переменные ξ_t и w_t , определенные формулами (26). Модель запишется в виде:

$$x_t = a w_t + \frac{c}{1-b} + \xi_t.$$

При этих условиях

$$[x_{-1}^2] \rightarrow a^2 [w_{-1}^2] + [\xi_{-1}^2], \quad [x_{-1}z] \rightarrow a [w_{-1}z]$$

и

$$\left\{ [x_{-1}^2] - \frac{[x_{-1}z]^2}{[z^2]} \right\} \rightarrow \left\{ [\xi_{-1}^2] + a^2 \left[[w_{-1}^2] - \frac{[w_{-1}z]^2}{[z^2]} \right] \right\}.$$

¹ В этой и следующих формулах, знак \rightarrow указывает, что оба члена стремятся по вероятности к одному и тому же пределу.

В выражении справа член в скобках равен остаточной дисперсии регрессии w_{t-1} относительно z_t . Он обязательно положителен (и равен нулю, лишь когда z_t постоянная). Множитель при λ_b в формуле (39), следовательно, асимптотически больше $[\xi_{-1}^2]$, его значения при отсутствии экзогенной переменной. Второй член формулы (39) асимптотически эквивалентен $[\epsilon_{-1}\xi_{-1}]$; он имеет один и тот же предел независимо от того, содержит модель экзогенную переменную или нет. Итак, предел λ_b и предел $b^* - b$ максимальны по абсолютной величине при отсутствии экзогенной переменной.

Аналогично, беря пределы по вероятности в системе (38), находим, что асимптотически

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{1+b\rho}{(1-b\rho)(1-b^2)} \cdot \frac{\sigma^2}{a^2 S^2} + \frac{1+2H}{1-b^2} \right] \lambda_b + \frac{H}{ba} \lambda_a \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{1-b\rho} \cdot \frac{\sigma^2}{a^2 S^2}, \\ & \frac{aH}{b} \lambda_b + \lambda_a \rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где

$$\sigma^2 = E(\epsilon_t^2); \quad S^2 = \lim \frac{1}{T} \sum (z_t - \bar{z})^2$$

и

$$H = \sum_{\tau=1}^{\infty} b^\tau R_\tau,$$

где R_τ — коэффициенты автокорреляции z_t , определенные в предыдущей главе. Из системы (40) можно вычислить значения асимптотических смещений для любой системы значений коэффициентов и любой последовательности z_t . А именно, можно видеть, что смещение имеет порядок $\alpha = \sigma^2/a^2 S^2$. Оно будет мало, если изменчивость экзогенных величин сильно превосходит изменчивость ошибок и если коэффициент a не близок к нулю.

В качестве примера рассмотрим случай, в котором $b = 0,60$ и $\rho = 0,50$. Если экзогенной переменной нет, то асимптотическое смещение b^* равно приблизительно 0,25. Величина H самое большее равна 1,5. Если $H = 1,2$, что соответствует весьма регулярному изменению экзогенной переменной, то $\lim (b^* - b)$ равен примерно 0,20 для $\alpha = 1$ и примерно 0,08 для $\alpha = 0,25$. Если $H = 0$, т. е. если экзогенная переменная эволюционирует иррегулярно, то $\lim (b^* - b)$ равен примерно 0,17 для $\alpha = 1$ и примерно 0,08 для $\alpha = 0,25$.

Таким образом, асимптотическое смещение в большинстве случаев остается заметным. Оно сильно влияет на результаты, которые пытаются извлечь из обработки больших выборок с малыми дисперсиями для b^* и a^* .

Это аналитическое изучение двух простых примеров позволяет понять асимптотические тенденции, которым подчиняются оценки наименьших квадратов при автокоррелированных ошибках. Однако оно

лишь частично дает сведения относительно результатов конкретных эконометрических исследований, которые чаще всего основаны на коротких рядах наблюдений. В упомянутой выше статье [207] искусственные выборки были построены для модели (36), т. е. для второго из приведенных примеров. Их использование позволило сделать три следующих вывода.

1. Вычисленное по формулам (37) и (40) асимптотическое смещение, по-видимому, почти равно разности между значениями математического ожидания оценки, которое оно принимает в моделях с зависимыми и независимыми ошибками. Иначе говоря, получается довольно точное представление о $E(b^*)$ или $E(a^*)$ в модели с зависимыми ошибками после добавления асимптотического смещения к значению, которое принимает $E(b^*)$ или $E(a^*)$ в модели с независимыми ошибками. Довольно часто может оказаться, что асимптотическое смещение компенсирует смещение, существование которого констатировалось в § 3 (см. рис. 1).

2. Действительные дисперсии оценок b^* и a^* отличаются, очевидно, от значений, найденных по обычным формулам для авторегрессионных моделей с независимыми ошибками. Они, по-видимому, наоборот, близки в среднем к значениям, даваемым формулами для неавторегрессионных моделей с зависимыми ошибками, причем запаздывающие эндогенные переменные рассматриваются тогда как экзогенные (см. гл. 13, § 5).

3. Как показало аналитическое изучение первого примера, остатки для оценки ϵ_t^* явно слабее автокоррелированы, чем ошибки ϵ_t . В рассматриваемых выборках, когда ошибки подчиняются авторегрессионному процессу первого порядка с коэффициентом, равным 0,50, значения первого коэффициента автокорреляции остатков сильно рассеяны вокруг средней, близкой к 0,30.

Последнее замечание имеет важное следствие для критериев обнаружения автокорреляции ошибок. Несомненно, теория критерия Дарбина и Уотсона применима лишь к неавторегрессионным моделям. Однако часто из-за отсутствия другого критерия его применяют в авторегрессионных моделях, пользуясь таблицами, часть которых была приведена в гл. 13, § 2. В самом деле, так как остатки автокоррелированы слабее, чем ошибки, *критерий Дарбина—Уотсона теряет мощность в авторегрессионных моделях*. Так, в рассмотренных Э. Маленно [207] примерах, в которых ошибки подчинены процессу

$$\epsilon_t = 0,5\epsilon_{t-1} + \eta_t, \quad (41)$$

d^* оказывается меньше d_L лишь в одной четверти случаев (d_L выбирается для уровня значимости 5%). В большинстве случаев умеренная зависимость ошибок этим критерием не обнаруживается.

Дж. Дарбин [82] доказал, что в авторегрессионных моделях уровень значимости обычного критерия Дарбина—Уотсона отличается, даже асимптотически, от табличного. Он предложил также критерий, асимптотически пригодный для таких моделей.

Если неблагоприятная гипотеза специфицирует для ошибок авторегрессионный процесс первого порядка, то рассматриваемый крите-

рий сравнивает с некоторой нормальной центрированной приведенной переменной величину

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\sum_{t=2}^T \varepsilon_t^* \varepsilon_{t-1}^*}{\sum_{t=2}^T \varepsilon_{t-1}^{*2}}. \quad (42)$$

В формуле (42) квадратный корень из

$$k^2 = \frac{1}{T} - \sigma^{*2} (b_1^*) \quad (43)$$

и $\sigma^{*2} (b_1^*)$ означает обычную оценку дисперсии b_1^* (она определена в § 2 этой главы). В случае независимости величина (42) распределена асимптотически по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 1. (Гипотеза независимости отбрасывается, если формула (43) дает для k^2 отрицательную величину.)

При нормальном распределении ошибок этот критерий асимптотически эквивалентен критерию отношения правдоподобий, так что он должен иметь хорошую асимптотическую эффективность. Однако может случиться, что в малых выборках его мощность остается невысокой, так как зависимость остатков обычно слабее, чем зависимость ошибок. В ста примерах, рассмотренных в [207], в 62 случаях, использующих процесс (41), значение величины (42) оказывается большим 1,28 (теоретический порог значимости при уровне 10% против альтернативы положительной зависимости). Исключение образуют лишь случаи, в которых величины Дарбина—Уотсона меньше порога d_2 при уровне значимости 10%.

Для хорошего понимания свойств метода наименьших квадратов в авторегрессионных моделях с зависимыми ошибками необходимо также изучить формулы, применяющиеся в прогнозировании. Так, в модели (36) второго примера обычные прогнозы получаются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x_{T+1}^P &= b^* x_T + a^* z_{T+1} + c^*, \\ x_{T+\theta}^P &= b^* x_{T+\theta-1}^P + a^* z_{T+\theta} + c^*, \quad \text{для } \theta = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, на этих прогнозах сказывается влияние асимптотических смещений для b^* , a^* , c^* ; они наверняка смещены, кроме случая благоприятных значений последовательности экзогенных переменных z_{T+1} , z_{T+2} , ..., $z_{T+\theta}$, ... Тем не менее вполне возможно, что в большинстве приложений эти смещения будут не очень существенными.

В самом деле, предположим, что в модели:

$$x_t = b x_{t-1} + a z_t + c + \varepsilon_t \quad (36)$$

ошибки подчинены процессу:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t,$$

где η_t образуют чисто случайный процесс. Величины x_t удовлетворяют тогда соотношению:

$$x_t = (b + \rho) x_{t-1} - \rho x_{t-2} + a z_t - \rho z_{t-1} + c(1 - \rho) + \eta_t. \quad (44)$$

Применение к (36) метода наименьших квадратов, как если бы ε_t были чисто случайны, было бы эквивалентно тому, что в (44) допущена ошибка спецификации, состоящая в игнорировании предопределенных переменных x_{t-2} и z_{t-1} . При обсуждении эффекта подобных ошибок спецификации в неавторегрессионных моделях мы видели, что они не приводят к смещениям в прогнозах при условии, что исключенные переменные связаны линейными стохастически устойчивыми соотношениями с другими экзогенными переменными¹. Таким образом, можно думать, что в рассматриваемых здесь моделях смещения прогнозов останутся малыми, если эволюция экзогенных переменных на протяжении периода прогноза следует средней эволюции, наблюдавшейся в течение периода оценки.

Однако в этом случае, как и в неавторегрессионных моделях, происходит потеря в точности, если пренебрегать зависимостью ошибок ε_t , фигурирующих в соотношении (36), или не учитывать переменные x_{t-2} и z_{t-1} в формуле (44). По крайней мере для большой выборки дисперсия обычных прогнозов больше дисперсии прогнозов, лучше использующих авторегрессионное представление (44).

Это обсуждение, естественно, приводит к изучению методов оценки, отличающихся от непосредственного применения метода наименьших квадратов.

6. Различные методы учета зависимости ошибок

При отсутствии автокорреляции ошибок выравнивание по методу наименьших квадратов годится как для авторегрессионных моделей, так и для моделей простой регрессии. Аналогично методы, позволяющие учитывать автокорреляцию ошибок, практически одинаковы в обоих видах моделей. Но их свойства сильно зависят от наличия или отсутствия эндогенных переменных с запаздыванием. Таким образом, здесь мы снова встречаемся с теми же методами оценки, что и в гл. 13, § 7, но теперь мы будем изучать другие их свойства.

а) *Когда точная форма зависимости ошибок известна*, с помощью преобразования переменных модель можно трансформировать так, чтобы исключить эту зависимость, затем провести выравнивание по методу наименьших квадратов. Полученные подобным образом оценки будут сходящимися и будут обладать асимптотическими свойствами, сформулированными выше в теоремах 1 и 2.

¹ См. гл. 8, § 5(1), где рассматривались лишь собственно экзогенные переменные, и соответствующее рассуждение нельзя строго перенести на случай, когда некоторые из опущенных переменных являются запаздывающими значениями эндогенных переменных. Тем не менее это рассуждение подсказывает существование некоторого более общего явления.

Предположим, таким образом, что во втором примере предыдущего параграфа значение ρ известно заранее. Модель можно записать в виде:

$$(x_t - \rho x_{t-1}) = b(x_{t-1} - \rho x_{t-2}) + a(z_t - \rho z_{t-1}) + \eta_t.$$

Регрессия наименьших квадратов разностей $x_t - \rho x_{t-1}$ относительно $x_{t-1} - \rho x_{t-2}$ и $z_t - \rho z_{t-1}$ приводит к сходящимся оценкам \hat{b} и \hat{a} для b и a .

Аналогично для значений $x_{T+\theta}$ прогноз можно сделать с помощью рекуррентных формул:

$$x_{T+\theta}^P = \rho x_{T+\theta-1}^P + \hat{b}(x_{T+\theta-1}^P - \rho x_{T+\theta-2}^P) + \hat{a}(z_{T+\theta} - \rho z_{T+\theta-1}).$$

Соображения в пользу этого способа приведены в § 4 этой главы.

Обычно зависимость ошибок точно не известна, так что приходится обращаться к менее простым или хуже обоснованным методам.

б) Для количественной характеристики значения этой зависимости при полученных оценках иногда проводят два выравнивания по методу наименьших квадратов: одно для самих переменных (например, x_t, x_{t-1}, z_t), другое для их первых разностей (например, $x_t - x_{t-1}, x_{t-1} - x_{t-2}$ и $z_t - z_{t-1}$). Если результаты близки, то есть основания полагать, что значения коэффициентов определены достаточно хорошо, и для этого не понадобилось более глубокое изучение зависимости ошибок (см. гл. 13, § 7).

Не следует, однако, строить иллюзии относительно достоинств этого метода. Он позволяет лишь увидеть, зависят ли оценки от гипотез относительно связи ошибок; но он не дает решения, когда оценки действительно от них зависят.

Рассмотрим первый пример предыдущего параграфа. Мы знаем, что выравнивание по методу наименьших квадратов для переменных x_t и x_{t-1} приводит к оценке b^* , которая стремится по вероятности к

$$\frac{b + \rho}{1 + b\rho}.$$

Аналогично выравнивание для первых разностей приводит к оценке:

$$b^0 = \frac{\sum (x_t - x_{t-1})(x_{t-1} - x_{t-2})}{\sum (x_{t-1} - x_{t-2})^2},$$

предел которой по вероятности равен:

$$\frac{1}{2} [b(1 + \rho) - (1 - \rho)].$$

Рис. 4 показывает изменения $\lim b^*$ и $\lim b^0$ в функции ρ при $b = 0,5$. Мы замечаем, что интервал между этими двумя пределами достаточно значим. Так, для значения $\rho = 0,5$ этот интервал стремится по вероятности к

$$0,125 \leq b \leq 0,800.$$

Он слишком велик, чтобы свидетельствовать о состоятельности оценки b .

Наличие экзогенных переменных уменьшает этот интервал, но не всегда настолько, чтобы его длиной можно было пренебречь.

в) Можно *одновременно оценить* как коэффициенты авторегрессионной модели, так и характеристические параметры зависимости ошибок, применяя тот или иной из методов, описанных в б) и в) гл. 13, § 7.

Рассмотрим, например, модель:

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + c + \varepsilon_t \quad (36)$$

и пусть априори известно, что ошибки подчинены авторегрессионному процессу первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

Величины x_t удовлетворяют тогда соотношению:

$$x_t = (b + \rho)x_{t-1} - b\rho x_{t-2} + az_t - a\rho z_{t-1} + c(1 - \rho) + \eta_t. \quad (44)$$

Применением итеративного метода, описанного в гл. 13, § 7 б), можно найти оценки \hat{b} , \hat{a} , \hat{c} и $\hat{\rho}$, минимизирующие сумму квадратов остатков,

которые соответствуют формуле (44). Гипотеза Дж. Дарбина позволяет далее перейти к обычной регрессии для соотношения вида:

$$x_t = b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + d + \eta_t,$$

оценив ρ через $\rho^* = -a_1^*/a_0^*$; и, наконец, оценить b , a и c с помощью второй обычной регрессии для $x_t - \rho^*x_{t-1}$ относительно $x_{t-1} - \rho^*x_{t-2}$ и $z_t - \rho^*z_{t-1}$.

Одновременная оценка зависимости ошибок и коэффициентов модели позволяет использовать формулу (44) для вычисления прогнозов относительно эндогенной переменной. В самом деле, в гл. 11, § 8 показано, что если рассматриваемая теперь модель была полностью известна априори, то наилучшие прогнозы получались с помощью рекуррентных формул:

$$x_{T+\theta}^P = (b + \rho)x_{T+\theta-1}^P - b\rho x_{T+\theta-2}^P + az_{T+\theta} - a\rho z_{T+\theta-1} + c(1 - \rho).$$

Зная сходящиеся оценки \hat{b} , \hat{a} , \hat{c} и $\hat{\rho}$ коэффициентов, можно, таким образом, применить для прогнозов формулы:

$$\begin{aligned} x_{T+\theta}^P &= (\hat{b} + \hat{\rho})x_{T+\theta-1}^P - \hat{b}\hat{\rho}x_{T+\theta-2}^P + \\ &+ \hat{a}z_{T+\theta} - \hat{a}\hat{\rho}z_{T+\theta-1} + \hat{c}(1 - \hat{\rho}). \end{aligned} \quad (45)$$

В принципе одновременная оценка коэффициентов модели и зависимости ошибок дает удовлетворительное решение рассмотренной проблемы.

Не следует, однако, слишком переоценивать практическое значение этого метода в эконометрии. В самом деле, он обосновывается теоремами 1 и 2, которые устанавливают интересные асимптотические свойства выравнивания по методу наименьших квадратов для авторегрессионной формы с независимыми ошибками — в нашем примере форма (44)¹. Однако, во-первых, могут оставаться значительные асимптотические смещения, если природа зависимости ошибок специфицирована некорректно. Во-вторых, свойства этих оценок в малых выборках оказываются гораздо худшими, чем их асимптотические свойства.

Рассмотрим вначале первый пункт. Мы можем, конечно, ограничиться простой авторегрессионной схемой, поскольку нам нужно лишь представление об эффекте зависимости ошибок для статистических методов, предполагающих их независимость.

Тогда можно считать, что ошибки подчиняются зависимости вида:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t. \quad (46)$$

Однако спецификация (46) может не описывать правильно процесс ошибок, если речь идет об оценке зависимости. Поэтому важно изучить чувствительность оценок коэффициентов как функцию гипотез относительно природы этого процесса. Эта чувствительность, по-видимому, очень велика.

В качестве примера приведем следующие формулы для модели и процесса ошибок:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= 0,5 x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= 0,3 \varepsilon_{t-1} + 0,1 \varepsilon_{t-2} + \eta_t, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где η_t образуют чисто случайный процесс. Предположим, что эконометрист не обращает внимания на точную форму системы (47) и использует спецификацию:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= b x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

которая может казаться очень близкой к правильной спецификации. Пусть \hat{b} и $\hat{\rho}$ — оценки b и ρ , полученные выравниванием по методу наименьших квадратов для авторегрессионной формы, выведенной из (48). Таким образом,

$$x_t = (\hat{b} + \hat{\rho}) x_{t-1} - \hat{\rho} x_{t-2} + \eta_t. \quad (49)$$

Нетрудно доказать, что \hat{b} и $\hat{\rho}$ стремятся по вероятности соответственно к 0,67 и 0,13 при неограниченном возрастании числа наблюдений.

¹ Теоремы 1 и 2 не применимы непосредственно, если коэффициенты авторегрессионной формы подчиняются априорным ограничениям. Однако, применяя доказательства, аналогичные использованным в нелинейных моделях (гл. 9), можно установить, что выравнивание по методу наименьших квадратов приводит к сходящимся оценкам, которые даже асимптотически эффективны при нормальном распределении ошибок. Можно также определить матрицу асимптотических ковариаций этих оценок.

Таким образом, существует асимптотическое смещение, равное 0,17, для оценки b , хотя ситуация и не является столь исключительной.

Заметим, однако, что асимптотическое смещение оценок не очень сильно влияет на прогнозы. В самом деле, тогда как система (47) приводит к авторегрессионной форме:

$$x_t = 0,80 x_{t-1} - 0,05 x_{t-2} - 0,05 x_{t-3} + \eta_t,$$

выравнивание (49) по методу наименьших квадратов приводит асимптотически к мало отличающейся форме:

$$x_t = 0,80 x_{t-1} - 0,09 x_{t-2} + \eta_t.$$

Это показывает, что оценки коэффициентов могут быть неточными; тем не менее с их помощью можно получить достаточно хорошие прогнозы. Те же выводы, по-видимому, справедливы для малых выборок по крайней мере, если обобщить вышеприведенные результаты анализа нескольких искусственных выборок (см. [207]). Анализировалась модель:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= bx_{t-1} + az_t + c + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \right\}$$

со следующими значениями параметров: $b = 0,60$; $a = 0,40$; $c = 0,00$; $\rho = 0,50$. Эти параметры были одновременно оценены для выборок из двадцати последовательных наблюдений с помощью вышеупомянутого итеративного метода. Оценки показали большое рассеяние вокруг среднего значения 0,25 со среднеквадратическим отклонением 0,28. Аналогично оценки коэффициентов b , a , и c обнаружили большее рассеяние в обе стороны от истинных значений, чем прямые оценки, полученные выравниванием наименьших квадратов для

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + c + \varepsilon_t$$

(оценки, «игнорирующие» зависимость ошибок). Тем не менее определенные формулами (45) прогнозы на базе одновременной оценки коэффициентов и ρ сравнимы по точности с прогнозами по формулам (29), которые не учитывают зависимости ошибок. Формулы (45) давали даже более точные результаты для самого первого прогноза ($\theta = 1$).

г) Был предложен метод оценки специально для авторегрессионных моделей с зависимыми ошибками. Он состоит в том, что в качестве инструментальных переменных используются некоторые из экзогенных переменных с запаздыванием. Рассмотрим уже изученную в § 2 (а) модель:

$$x_t = bx_{t-1} + az_t + \varepsilon_t \quad (50)$$

и не будем формулировать какой-либо гипотезы относительно ошибок ε_t , потребуем лишь равенства нулю их математического ожидания при любых значениях экзогенных переменных z_t .

Существование асимптотического смещения при выравнивании (50) методом наименьших квадратов объясняется тем, что x_{t-1} и ε_t не независимы, когда имеется случайная зависимость между ε_t и ошиб-

ками предыдущих периодов. Для устранения этой трудности можно z_{t-1} заменить на x_{t-1} , «инструментальную переменную» в нормальных уравнениях, определяющих оценки. Экзогенная переменная z_t и ее запаздывающие значения будут тогда двумя инструментальными переменными оценки¹, а коэффициенты b и a оцениваются решениями \hat{b} и \hat{a} системы:

$$\left. \begin{aligned} \sum x_t z_t &= \hat{b} \sum x_{t-1} z_t + \hat{a} \sum z_t^2, \\ \sum x_t z_{t-1} &= \hat{b} \sum x_{t-1} z_{t-1} + \hat{a} \sum z_t z_{t-1}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Легко находятся пределы по вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum x_t z_t &\rightarrow aS^2(H+1) \\ \frac{1}{T} \sum x_{t-1} z_t &\rightarrow \frac{aS^2}{b} H \\ \frac{1}{T} \sum x_t z_{t-1} &\rightarrow aS^2(R_1 + b + bH) \end{aligned}$$

при тех же определениях, что и в § 5 для S^2 , R_τ и H . В пределе система (51) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} abH + ab &= \hat{a}\hat{b}H + \hat{a}\hat{b}, \\ abH + ab + aR_1 &= \hat{a}\hat{b}H + \hat{a}\hat{b} + \hat{a}R_1, \end{aligned} \right\}$$

или же

$$\left. \begin{aligned} abH + ab &= \hat{a}\hat{b}H + \hat{a}\hat{b}, \\ aR_1 &= \hat{a}\hat{b} + \hat{a}(R_1 - b), \end{aligned} \right\}$$

решением которой является $\hat{b} = b$ и $\hat{a} = a$.

Если ошибки ϵ_t удовлетворяют гипотезе 1, \hat{b} и \hat{a} будут иметь среднеквадратические отклонения большие, чем у оценок b^* и a^* , полученных выравниванием наименьших квадратов. Однако эта потеря точности допустима только тогда, когда независимость последовательных ошибок недостоверна и когда число наблюдений достаточно большое.

Изучение искусственных выборок подтверждает существование этой потери точности. Для моделей, изученных в [207], среднеквадратические отклонения \hat{b} и \hat{a} были примерно в полтора раза больше, чем у b^* и a^* . Так как асимптотические смещения были малы, выравнивание наименьших квадратов приводило к лучшим результатам, чем оценка с помощью инструментальных переменных z_t и z_{t-1} . Однако выборки содержали лишь около 20 наблюдений. Оценка с помощью инструментальных переменных предпочтительнее, если нужно анализировать существенно более длинные ряды.

¹ Вообще, если в модели существуют h запаздывающих значений эндогенной переменной и m экзогенных переменных, то инструментальными переменными будут сами z_{jt} и h значений $z_{j, t-\tau}$ с запаздыванием. Выбор этих значений подсказывается принципами гл. 10.

Это впечатление подтверждается результатами другого исследования искусственных выборок. Мы коротко рассмотрим его в связи с еще одним методом оценки.

д) К. Валлис [311] предложил вначале применять оценку с помощью инструментальных переменных согласно вышеописанной процедуре, но не заканчивать на этом процесс оценки. Так как оценки коэффициентов сходятся, можно использовать остатки $\hat{\varepsilon}_t$ для оценки зависимости ошибок, затем можно вычислять новую оценку с помощью метода, специально приспособленного для обнаруженной зависимости ошибок.

Например, если заранее специфицировать ошибки как авторегрессионный процесс первого порядка типа (46), то можно вычислить $\hat{\rho}$ — первый коэффициент автокорреляции $\hat{\varepsilon}_t$. При правильной спецификации эта оценка не испытает никакого асимптотического смещения. Таким образом, ее можно использовать в методе линейных оценок. Так, для выравнивания модели (50) вычисляется регрессия x_t — $\hat{\rho}x_{t-1}$ относительно

$$x_{t-1} - \hat{\rho}x_{t-2} \quad \text{и} \quad z_t - \hat{\rho}z_{t-1}.$$

Валлис назвал эту процедуру «обобщенным методом наименьших квадратов»¹. Он изучал его свойства с помощью искусственных выборок из 50 наблюдений каждая. При существенной связи ошибок полученные оценки оказались лучше как оценок обычной регрессии, непосредственно примененной к модели, так и оценок с помощью инструментальных переменных (\hat{a} и \hat{b} предыдущего раздела г)).

* *

Этот анализ возможных методов оценки авторегрессионных моделей с зависимыми ошибками приводит к довольно пессимистическому заключению. Когда мы имеем дело с короткими рядами, ни один из рассмотренных методов не позволяет получить точную оценку зависимости ошибок. При таких условиях прямое выравнивание по методу наименьших квадратов дает, несомненно, наилучшие оценки коэффициентов. Однако распределение оцениваемых коэффициентов нельзя оценить надежно. Критерии и доверительные интервалы обязательно окажутся очень приближенными.

¹ Сам термин «обобщенный метод наименьших квадратов» ввел А. Эйткен в 1934 г., он применим в гораздо более широкой области. Процедура Валлиса является одним из частных вариантов. — *Прим. ред.*

ГЛАВА 15. МОДЕЛИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

1. Введение ¹

Законы поведения, которые отражены в экономической модели, описывают, как одна или несколько эндогенных переменных определяются через значения некоторых экзогенных переменных. Зависимость между экзогенными и эндогенными переменными редко проявляется мгновенно, так как результаты действия экономических факторов осуществляются с некоторой задержкой. Период наблюдений обычно покрывает довольно длительный интервал времени, так что запаздывание поведения не всегда явно входит в соотношения. Адаптация, происходящая с задержкой в два или три месяца, может рассматриваться как мгновенная для годовичного периода наблюдений. Но в некоторых случаях адаптация требует большего времени. Поэтому запаздывания должны были бы фигурировать во многих моделях и тем чаще, чем больше в модели используются квартальные или даже месячные данные.

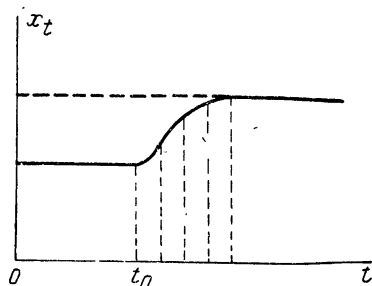


Рис. 1

Однако было бы неточно предполагать, что адаптация поведения происходит в целом сразу после некоторого фиксированного запаздывания. Если экзогенные переменные в течение длительного периода остаются постоянными, а затем резко изменяются в момент t_0 , после чего снова перестают изменяться, то мы будем наблюдать, скорее, не резкое изменение каждой экзогенной переменной в момент $t_0 + \theta$, а постепенный переход от одного равновесного значения к другому, напоминающий эволюцию, представленную на рис. 1.

Предположим, что существует одна эндогенная переменная x_t и одна экзогенная переменная z_t , принимающая значение z^0 до момента t_0 и значение z^1 начиная с момента t_0 . Предположим также, что зависи-

¹ По теме этой главы см. [129].

мость между z_t и x_t точная и линейная, так что равновесное значение x_t равно $az^0 + b$ до момента t_0 и $az^1 + b$ по окончании выравнивания по новому значению z_t . Естественно считать, что в промежуточное время значение x_t линейно зависит от z^0 и z^1 с коэффициентами, зависящими только от разности $t - t_0$.

Тогда запишем:

$$x_{t_0+\tau} = \alpha d_\tau z^1 + a(1-d_\tau)z^0 + b; \quad \tau \geq 0.$$

Можно положить:

$$c_0 = d_0 \quad \text{и} \quad c_\tau = d_\tau - d_{\tau-1} \quad \text{для} \quad \tau > 0,$$

так что

$$x_{t_0+\tau} = a(c_0 + c_1 + \dots + c_\tau)z^1 + a(c_{\tau+1} + c_{\tau+2} + \dots + c_h)z^0 + b,$$

где принято, что d_τ равно 1, начиная с h , и, что, следовательно, $c_\tau = 0$ для $\tau > h$. Эти же формулы применимы также с $h = \infty$ в случае, когда d_τ неограниченно возрастают вместе с τ и стремятся к 1.

Вообще, при любой эволюции экзогенной переменной z_t значение эндогенной переменной x_t можно рассматривать как линейную функцию предыдущих значений z_t , так что

$$x_t = a \sum_{\tau=0}^h c_\tau z_{t-\tau} + b$$

при условии

$$\sum_{\tau=0}^h c_\tau = 1$$

или же

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + \dots + a_h z_{t-h} + b$$

без ограничений на коэффициенты a_τ . Наконец, учитывая случайные ошибки, получаем общую форму линейной модели с распределенными запаздываниями¹, которая содержит одну эндогенную и одну экзогенную переменную:

$$x_t = a \sum_{\tau=0}^h c_\tau z_{t-\tau} + b + \varepsilon_t \quad (1)$$

при условии

$$\sum_{\tau=0}^h c_\tau = 1 \quad (2)$$

или

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + \dots + a_h z_{t-h} + b + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Модели этого вида мы уже рассматривали при обсуждении функции потребления (гл. 4, § 4). Ниже будут изучены некоторые более общие причины того, что они явились предметом эконометрических исследований.

¹ По-английски «distributed lag models».

Мы видели также, как модель типа уравнения с распределенными запаздываниями естественно интерпретирует результаты спектрального анализа зависимости между двумя рядами $\{x_t\}$ и $\{z_t\}$, во всяком случае, когда заранее можно сказать, что $\{z_t\}$ является причиной $\{x_t\}$, а не наоборот (см. уравнение (88) гл. 12 и пример зависимости между производством и занятостью в текстильной промышленности). По-видимому, подобный спектральный анализ является лучшим методом оценки моделей с распределенными запаздываниями, если априори ничего неизвестно ни о коэффициентах a_τ , ни о процессе ошибок ε_t , который все же предполагается стационарным. Ясно, что в подобной ситуации оценка требует наличия сравнительно длинных рядов.

Обычно, разумеется, мы располагаем некоторыми априорными представлениями относительно коэффициентов c_τ модели. Известно, например, что c_τ все положительные, т. е. что изменение лишь одной из величин z_θ повлияет в одном и том же направлении на все значения x_t (для t , изменяющегося от θ до $\theta + h$). Известно также, что наиболее важны первые коэффициенты c_0, c_1, c_2 и что c_τ уменьшается с ростом τ по крайней мере начиная с некоторого значения τ .

При использовании коротких временных рядов на c_τ нужно наложить еще более ограничивающие условия, так чтобы последовательность $\{c_\tau\}$ зависела от малого числа параметров. Поэтому ниже мы обсудим некоторые гипотезы, которые нам представляются удобными и допустимыми.

В некоторых случаях абстрактный экономический анализ подсказывает точное функциональное соотношение для определения c_τ . В других случаях можно считать обоснованной некоторую довольно точную спецификацию процесса ошибок.

По тому или иному из изложенных соображений часто будет рассматриваться параметрическая модель. В этом случае спектральный анализ гл. 12, § 12 не даст ответа на поставленную проблему оценки. При достаточно длинных рядах он все же может служить методом для проверки специфических гипотез, входящих в модель, относительно последовательности a_τ . Эта проверка может основываться на сравнении, с одной стороны, передаточной функции, получающейся с помощью спектрального анализа, и, с другой стороны, передаточных функций, не противоречащих модели (см. (72) гл. 12 и (5) — ниже).

Заметим, что существует одно интересное соответствие между авторегрессионными моделями и моделями с распределенными запаздываниями. *Обычно авторегрессионную форму можно придать всякой линейной модели с распределенными запаздываниями при условии, что она содержит лишь одну экзогенную переменную (или содержит экзогенных переменных не больше, чем эндогенных).* Однако при этом может быть необходимо ввести бесконечное число запаздывающих значений для одной или нескольких эндогенных переменных. Точно так же любую устойчивую линейную авторегрессионную модель с одной эндогенной переменной можно в принципе преобразовать в модель с распределенными запаздываниями.

В самом деле, соотношение (3) можно рассматривать формально как уравнение в конечных разностях для z_t с правой частью $x_t - b$ —

— ε_t . Оно может быть разрешено таким образом, что z_t будет линейной функцией последовательных значений правой части. В § 3 мы увидим простые примеры по этому поводу.

Для изучения этого вопроса в общем виде обозначим через D симметрический оператор, который преобразует x_t в x_{t-1} , так что $Dx_t = x_{t-1}$, $D^2x_t = x_{t-2}$ и так далее. Соотношение (3) можно записать как

$$x_t = [a_0 + a_1 D + \dots + a_h D^h] z_t + b + \varepsilon_t,$$

причем сумма в скобках может быть и бесконечной.

Рассмотрим теперь полином или, более обще, следующую функцию от вспомогательной переменной z , которую не следует путать с z_t :

$$A(z) = \sum_{\tau=0}^n a_{\tau} z^{\tau} \quad (4)$$

(сумма сходится всегда для $|z| \leq 1$ при положительных a_{τ} , так как их сумма конечна). Заметим, что функции $A(z)$ можно сопоставить:

$$T(\omega) = A(e^{-i\omega}) \quad (5)$$

функцию переноса, связывающую последовательность z с последовательностью систематических частей $x_t - b$, т. е.

$$\sum_{\tau} a_{\tau} z_{t-\tau}.$$

Учитывая определение (4), уравнение (3) можно записать в виде:

$$x_t = A(D) z_t + b + \varepsilon_t. \quad (6)$$

С помощью построения, аналогичного приведенному в гл. 11 в связи с равенством (42), функции $B(z)$, обратной к $A(z)$, можно сопоставить разложение в ряд, которое мы запишем следующим образом:

$$B(z) = \frac{1}{a_0} \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau} z^{\tau}; \quad b_0 = 1. \quad (7)$$

По определению произведение $B(z)A(z)$ равно 1. Рассмотрим выражение $a_0 B(D) x_t$. Учитывая (5) и (7), видим, что оно равно двум членам следующего уравнения:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau} x_{t-\tau} = a_0 z_t + e + \xi_t, \quad (8)$$

где

$$e = b \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau}; \quad \xi_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau} \varepsilon_{t-\tau}. \quad (9)$$

Если все корни уравнения $B(z) = 0$ по модулю больше 1 (условие устойчивости, аналогичное относящемуся к уравнению (35) гл. 11) и

если процесс $\{e_t\}$ стационарен, то процесс $\{\xi_t\}$ также стационарен. Модель (3) принимает, таким образом, авторегрессионную форму:

$$x_t = - \sum_{\tau=1}^{\infty} b_{\tau} x_{t-\tau} + a_0 z_t + e + \xi_t. \quad (10)$$

Обратное преобразование авторегрессионной модели в модель с распределенными запаздываниями производится аналогично. При наличии многих экзогенных переменных приведенный метод позволяет устранить запаздывание лишь одной из них. Он приводит к смешанной модели, содержащей запаздывающие значения как эндогенной переменной, так и некоторых экзогенных величин.

Как увидим ниже, польза такого соответствия состоит в том, что b_{τ} принимают особенно простую форму при некоторых общих гипотезах относительно c_{τ} . Оценка для авторегрессионной формы может оказаться более простой, чем для прямого выражения модели с распределенными запаздываниями.

Впрочем, нужно заметить, что при переходе от одной формы к другой ошибки трансформируются. Свойства ξ_t отличаются, таким образом, от свойств e_t . Если ошибки e_t неавтокоррелированы, то ошибки ξ_t , вообще говоря, автокоррелированы. Таким образом, надо будет точно изучить, как это преобразование влияет на ошибки и как оно сказывается на свойствах выравнивания для авторегрессионной формы.

2. Модели с распределенными запаздываниями в эконометрии

Модели с распределенными запаздываниями призваны сыграть большую роль в эконометрии. Вследствие жесткости технических, организационных и психологических условий поведение не приспосабливается немедленно к изменению обуславливающих его переменных. Адаптация чаще всего бывает постепенной. Этот факт хорошо известен в экономической теории, где часто различают краткосрочные и долгосрочные реакции. Так, изменение в относительной цене двух взаимозаменяемых видов сырья приводит к быстрому пересмотру методов производства; однако полный эффект этого пересмотра проявляется лишь после обновления оборудования, которое было лучше приспособлено для использования одного вида сырья, чем другого. Аналогично, как мы видели в гл. 4, реакции домашних хозяйств на возрастание их дохода полностью проявляются лишь по истечении некоторого времени. Таким образом, адекватное представление фактов часто требует явного введения распределенных запаздываний.

Более того, эмпирическое определение лага адаптации важно для прикладной экономики. Нельзя правильно понять роль многочисленных мер экономической политики, если мы не знаем, когда ее эффекты начнут проявляться и когда они будут действовать в полную силу. Сюда относятся уменьшение или возрастание прямых налогов, изменение уровня учетной ставки, валютного курса. Чтобы узнать времен-

ной график влияния этих мер на разные аспекты поведения, обращаются к эконометрии.

Значение моделей с распределенными запаздываниями в развитии эконометрии было уже очень давно понято (см. [97], [98], [5], [297]). Однако пробелы в статистической информации делали трудным их применение. Теперь, по мере того как экономические данные становятся все более и более многочисленными и систематическими, их роль должна возрастать.

Постепенный характер адаптации в модели можно вводить различными способами. Можно построить модель с распределенными запаздываниями, не пытаясь анализировать в точности причины появления многочисленных лагов. Именно так обычно поступают на практике. Причины этих запаздываний слишком различны, чтобы их формальное выражение представляло интерес. Но иногда спецификация модели может объяснить распределенные запаздывания некоторой вполне точной причиной, и тогда модель принимает конкретную форму. Ограничимся примером, имеющим довольно общее значение [230], поскольку многие явления получают простую интерпретацию, если предположить, что прогнозы относительно экономических факторов подчиняются приводимой ниже гипотезе для цен.

Примем, что требуемое количество q_t определенного продукта в течение периода t зависит не только от его наблюдаемой цены, скажем p_t , но также от цены p^N , которую покупатели считают нормальной для этого продукта. Спрос можно тогда записать в виде:

$$q_t = ap_t + bp_t^N + c + \varepsilon_t.$$

Более того, примем, что нормальная цена пересматривается для каждого периода в сторону повышения или понижения в соответствии с тем, будет ли она ниже или выше наблюдаемой цены. Точнее, положим:

$$p_t^N - p_{t-1}^N = \beta (p_t - p_{t-1}^N),$$

где β — заключенный между нулем и единицей числовой коэффициент, характеристика способа формирования понятия «нормальной цены». Это уравнение в конечных разностях легко разрешается относительно p_t^N :

$$p_t^N = \beta \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\beta)^{\tau} p_{t-\tau}.$$

Нормальная цена является взвешенным средним значением цен, наблюдаемых в прошлом, причем веса образуют убывающую геометрическую прогрессию¹. Итак, спрос можно выразить как функцию последовательности наблюдаемых цен в виде:

$$q_t = \alpha p_t + \gamma \sum_{\tau=1}^{\infty} (1-\beta)^{\tau} p_{t-\tau} + c + \varepsilon_t,$$

¹ То же рассуждение можно применить для обоснования выражения данного М. Фридманом для «перманентного дохода» (см. формулу (58) гл. 4 и ее подстановку в функцию потребления (14) той же главы).

где $\alpha = a + b\beta$ и $\gamma = b\beta$. Речь идет о модели с распределенными запаздываниями вида (1), причем коэффициенты c_t начиная со второго уменьшаются в геометрической прогрессии.

Заметим, что учет постепенной адаптации может в некоторых случаях привести к авторегрессионным моделям, а не к моделям с распределенными запаздываниями. Рассмотрим еще один пример.

Предположим, что спрос на некоторый продукт устанавливается как функция долгосрочного уровня равновесия, который покупатели рассматривают как соответствующий наблюдаемой цене. Пусть q_t^E — это равновесный спрос, для которого мы примем зависимость:

$$q_t^E = ap_t + b + \varepsilon_t.$$

Истинный спрос отличается от равновесного спроса потому, что потребляющие продукт домашние или индустриальные установки не полностью адаптировались, или, более обще, потому, что существуют некоторые препятствия для слишком быстрого перехода от одного уровня спроса к другому. При этих условиях естественно считать, что изменение спроса $q_t - q_{t-1}$ зависит от отклонений этого спроса от равновесного $q_{t-1} - q^E$, и принять в первом приближении:

$$q_t - q_{t-1} = \delta(q_t^E - q_{t-1}) + \eta_t,$$

где δ — коэффициент, заключенный между нулем и единицей, и η_t — случайная ошибка. Из двух предшествующих равенств немедленно выводится авторегрессионная модель:

$$q_t = (1 - \delta)q_{t-1} + \alpha p_t + \gamma + \xi_t,$$

где $\alpha = a\delta$, $\gamma = b\delta$ и $\xi_t = \eta_t + \delta\varepsilon_t$. Разумеется, можно преобразовать эту модель, исключив q_{t-1} и введя распределенные запаздывания для p_t . Однако это преобразование будет воздействовать на случайные элементы.

Существенная разница между двумя предыдущими примерами связана с той ролью, которую в них играют случайные элементы. В первом примере спрос периода t зависит лишь от случайных факторов, входящих в этот период — наряду с наблюдаемой ценой p_t и нормальной ценой p_t^N . Во втором примере спрос периода t зависит косвенно от случайных факторов, участвующих в определении q_{t-1} , q_{t-1}^E , q_{t-2} и т. д. Случайные возмущения воздействуют на протяжении многих периодов, вместо того чтобы влиять на спрос только того периода, когда они появляются.

Таким образом, желательно иметь по возможности более точные представления относительно ошибок, фигурирующих в уравнениях. Следует избегать, к сожалению, весьма распространенной практики определения неслучайной модели, выполнения над ней различных более или менее сложных преобразований и введения ошибок только в конце, без обсуждения их происхождения.

Однако следует признать трудность подобного точного определения свойств случайных членов, вследствие чего надо постараться оценить степень чувствительности наших методов по отношению к неточности этой спецификации. Ниже мы попробуем это сделать.

3. Гипотезы относительно коэффициентов модели

Относительно коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_h обычно имеется некоторая априорная информация. Влияние того значения, которое принимает экзогенная переменная в течение периода t_0 , должно быть особенно значимым для поведения эндогенной переменной в периоды, непосредственно следующие за t_0 . Точнее, последовательность a_0, a_1, \dots, a_h в своих первых членах может быть возрастающей, но она должна быть постоянно убывающей после достижения максимума. Во многих случаях коэффициент a_0 будет наибольшим, в связи с чем можно допустить, что $a_\tau < a_{\tau-1}$ для любого τ , содержащегося между 1 и h .

Было бы естественно дать простую аналитическую форму этим априорным сведениям, иначе говоря, представить a_τ в виде заданной функции τ и некоторого малого числа параметров. Это равносильно принятию гипотезы, что последовательность a_τ принадлежит определенному классу. Так как данные не позволяют обычно очень точно определять коэффициенты модели, а наши априорные представления относительно последовательности ее коэффициентов довольно расплывчаты, то при выборе гипотезы относительно a_τ нужно исходить из соображений простоты.

Так, И. Фишер [97] предложил гипотезу, согласно которой a_τ уменьшается, начиная с некоторого номера, как *арифметическая прогрессия*. Например, a_0 и a_1 могут быть любыми, но следующие коэффициенты определяются соотношением:

$$a_\tau = a_2 \left(1 - \frac{\tau-2}{h-1} \right) \quad \text{для} \quad 2 \leq \tau \leq h.$$

Последовательность коэффициентов зависит, таким образом, от четырех параметров a_0, a_1, a_2 и h .

По мнению Л. Койка [183], иногда предпочтительнее рассматривать *геометрическое убывание*, которое описывает эволюцию по виду более удовлетворительную и устраняет проблему выбора максимального запаздывания h . Например, a_0 и a_1 любые, а следующие коэффициенты определяются соотношением:

$$a_\tau = a_2 c^{\tau-2} \quad \text{для} \quad \tau = 2, 3, \dots, \infty.$$

Здесь снова имеются лишь четыре параметра a_0, a_1, a_2 и c . Более того, как мы видели в примерах предыдущего параграфа, подобная гипотеза может появиться непосредственно в спецификации модели.

Арифметическая и геометрическая гипотезы неудобны тем, что они могут применяться ко всему ряду лишь в том случае, когда a_τ уменьшаются начиная с первых членов. Иногда можно предположить, что это так, но гипотеза будет редко выполняться для короткого периода наблюдения (месяц или даже квартал). Формула, применимая для все-

го ряда, имеет то преимущество, что она уменьшает общее число оцениваемых параметров, причем это не обязательно вредит представлению тех факторов, которые можно знать заранее.

С. Алмон [4] придал больше гибкости предложению И. Фишера, сохранив гипотезу о том, что a_τ в интервале $[0, h]$, выражаются через полиномиальную функцию от τ , степень которой выбирается заранее, причем существенно меньше h . Можно использовать и другие гипотезы.

В выражении (1) модели мы рассмотрим весовые коэффициенты c_τ , удовлетворяющие условию:

$$\sum_{\tau} c_{\tau} = 1.$$

Вообще говоря, вполне естественно предположить также, что все a_τ имеют одинаковый знак, так что $c_\tau \geq 0$. Итак, c_τ удовлетворяет тем же условиям, что и некоторое распределение вероятностей на множестве неотрицательных целых чисел, так что c_τ можно формально рассматривать, как вероятность, приписанную целому числу τ . Из априорных идей относительно эволюции a_τ следует, что это распределение должно быть асимметричным. Отсюда следует, что обычные законы теории вероятностей на неотрицательных целых числах являются источником всевозможных гипотез для последовательности c_τ .

В частности, И. Фишер [98] предложил логарифмическое нормальное распределение, согласно которому c_τ есть вероятность того, что нормальная переменная со средним значением μ и средним квадратическим отклонением σ примет значение, заключенное между $\ln \tau$ и $\ln (\tau + 1)$. Г. Тейл и Р. Стерн [294] оценили модель с распределенными запаздываниями, в которой c_τ были вычислены с помощью плотности распределения вероятности:

$$\lambda^2 \tau \exp(-\lambda \tau),$$

определенной на положительной полуоси $\tau \geq 0$.

Экспоненциальное распределение

$$c_{\tau} = (1 - c) c^{\tau}$$

снова воспроизводит рассмотренную выше гипотезу геометрического убывания. При наличии лишь одной экзогенной переменной это распределение интересно тем, что дает модель с особенно простой авторегрессионной формой. В самом деле, такая модель выражается равенством:

$$x_t = d \sum_{\tau=0}^{\infty} c^{\tau} z_{t-\tau} + b + \varepsilon_t, \quad (11)$$

где $d = a(1 - c)$. Она записывается также в виде:

$$x_t = cx_{t-1} + dz_t + e + \xi_t, \quad (12)$$

где $e = b(1 - c)$ и $\xi_t = \varepsilon_t - c\varepsilon_{t-1}$. Как мы увидим, это дает заметное преимущество для оценки.

Функция $A(z)$ имеет в этом случае простое выражение $d(1 - cz)^{-1}$, так что $B(z)$ равна $(1 - cz)/d$. Уравнение (12) хорошо соответствует тогда авторегрессионной форме (10) (см. уравнение (7), § 1).

Передаточная функция $T(\omega)$, ассоциированная $A(z)$, определяется амплитудой:

$$G(\omega) = \frac{d^2}{1 - 2c \cos \omega + c^2} \quad (13)$$

и сдвигом фазы:

$$\varphi(\omega) = \text{Arc tg} \frac{c \sin \omega}{1 - c \cos \omega}. \quad (14)$$

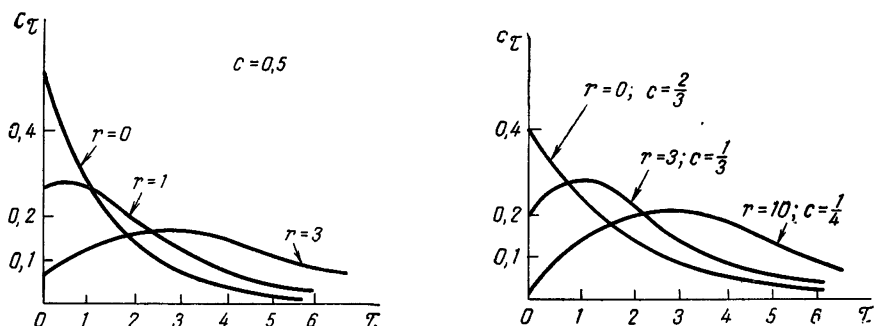


Рис. 2

В работе [280] предложено применять *распределение Паскаля*, которое также приводит к простой авторегрессионной форме и допускает возрастание первых членов последовательности a_τ .

Распределение Паскаля определяет c_τ следующим образом:

$$c_\tau = (1 - c)^{r+1} C_{r+\tau}^r c^r. \quad (15)$$

Оно включает лишь два параметра c и r (к которым следует добавить множитель a). Оно сводится к экспоненциальному распределению, когда $r = 0$, а для других значений r дает достаточно большое многообразие возможных эволюций (см. рис. 2).

Функция $A(z)$ тогда равна:

$$A(z) = d \sum_{\tau=0}^{\infty} C_{r+\tau}^r c^r z^\tau = \frac{d}{(1 - cz)^{r+1}}, \quad (16)$$

где $d = a(1 - c)^{r+1}$. Поэтому можно записать:

$$B(D) = \frac{(1 - cD)^{r+1}}{d}, \quad (17)$$

откуда непосредственно выводится выражение, имеющее авторегрессионную форму:

$$x_t = \sum_{\tau=1}^{r+1} (-1)^{\tau+1} C_{r+1}^{\tau} c^\tau x_{t-\tau} + dz_t + e + \xi_t. \quad (18)$$

В этих выражениях e и ξ_t получаются из b и ε_t применением оператора $(1 - cD)^{r+1}$. В частности, для $r = 1$ авторегрессионная форма принимает, таким образом, вид:

$$x_t = 2cx_{t-1} - c^2 x_{t-2} + dz_t + e + \xi_t \quad (19)$$

и для $r = 2$:

$$x_t = 3cx_{t-1} - 3c^2 x_{t-2} + c^3 x_{t-3} + dz_t + e + \xi_t.$$

Вообще, она включает $r + 1$ запаздывающих значений эндогенной переменной с коэффициентами, зависящими от параметра c .

Передаточная функция $T(\omega)$ сохраняет простое выражение. Она является функцией амплитуды:

$$G(\omega) = \frac{d^2}{[1 - 2c \cos \omega + c^2]^{r+1}} \quad (20)$$

и сдвига фазы:

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{\sum_{\tau=1}^{r+1} (-1)^{\tau+1} C_{r+1}^{\tau} c^{\tau} \sin \tau \omega}{\sum_{\tau=0}^{r+1} (-1)^{\tau} C_{r+1}^{\tau} c^{\tau} \cos \tau \omega}. \quad (21)$$

Д. Юргенсон [161] рекомендовал применение моделей с *рациональными распределенными запаздываниями*, что означает, что функция $A(z)$ рациональная, т. е. представляет собой отношение двух полиномов $P(z)/Q(z)$. Всегда можно найти рациональное приближение к любой функции. Поэтому класс моделей с рациональными распределенными запаздываниями очень обширен. Однако Д. Юргенсон дал более специфическое предложение для приложений, а именно, что заранее фиксируется максимальная степень полиномов $P(z)$ и $Q(z)$. Если ограничиться, например, полиномами второй степени:

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2, \\ Q(z) &= 1 - q_1 z - q_2 z^2, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

то функция $A(z)$ будет зависеть от пяти неизвестных параметров.

Модель приобретает тогда следующее простое выражение:

$$Q(D)x_t = P(D)z_t + Q(1)b + Q(D)\varepsilon_t. \quad (23)$$

Например, в случае полиномов второй степени:

$$x_t = q_1 x_{t-1} + q_2 x_{t-2} + p_0 z_t + p_1 z_{t-1} + p_2 z_{t-2} + e + \xi_t, \quad (24)$$

где

$$e = (1 - q_1 - q_2)b, \quad \xi_t = \varepsilon_t - q_1 \varepsilon_{t-1} - q_2 \varepsilon_{t-2}.$$

В уравнениях (23) и (24) присутствуют одновременно запаздывания для эндогенной и экзогенной переменных. Однако в смысле оценки эти уравнения имеют простую форму, так как оцениваемые параметры входят в них линейно. Таким образом, эти уравнения столь же просты, как и авторегрессионная форма модели (11), которая является ее частным случаем, когда степень P равна 0, а степень Q равна 1.

4. Прямая оценка с помощью линейных и нелинейных регрессий

Модель с распределенными запаздываниями:

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + \dots + a_h z_{t-h} + b + \varepsilon_t \quad (3)$$

входит в общую категорию рассмотренных в гл. 6 моделей регрессии по крайней мере, если для коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_h не принимается никакой специальной гипотезы. В самом деле, можно рассматривать $h + 2$ экзогенных переменных z_{jt}^0 , определенных следующим образом:

$$\begin{aligned} z_{jt}^0 &= z_{t+j-1} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, h+1 \\ z_{h+2,t}^0 &= 1 \quad \text{при любом } t. \end{aligned}$$

Модель записывается тогда в виде:

$$x_t = a' z_t^0 + \varepsilon_t,$$

где a — вектор из $h + 2$ коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_h, b . Таким образом, мы пришли к обычной множественной регрессии.

Если спецификация модели не накладывает ограничений на a_τ , то с помощью регрессии наименьших квадратов получаются несмещенные оценки $a_0^*, a_1^*, \dots, a_h^*, b^*$. Эти оценки обладают соответственно свойствами, описанными в гл. 6 или 13, в зависимости от того, образуют ошибки ε_t чисто случайный процесс или нет.

Однако этот способ дает лишь посредственную точность. В самом деле, последовательность z_t обычно достаточно регулярна, так как z_t близко к z_{t-1} , и, более того, близко к

$$2z_{t-1} - z_{t-2} = z_{t-1} + \Delta z_{t-1}.$$

При этих условиях $h + 2$ экзогенные переменные z_j^0 имеют достаточно сильную мультиколлинеарность. Матрица M_{zz} , которую они определяют, близка к некоторой вырожденной матрице. Обратная ей матрица, которая входит в выражение дисперсий a_τ^* , имеет очень большие элементы и, следовательно, большие дисперсии по крайней мере для малых выборок.

Именно поэтому нецелесообразно было бы пренебрегать априорными соображениями, которые заставляют нас считать, что a_τ имеют регулярную более или менее жестко определенную эволюцию. Только лишь спецификация разумных гипотез для a_τ часто позволяет дать, хотя и не очень точно, определение вида адаптации эндогенной величины к изменениям экзогенной.

Впрочем, перед эконометристом, который не хочет формулировать никакой гипотезы для a_τ , возникает одна специальная проблема. Он должен фиксировать максимальное запаздывание h , за пределами которого a_τ можно считать равными нулю. В принципе это максимальное запаздывание должно определяться с помощью проанализированных данных. Но, как мы увидим, возможные методы, по-видимому, не дают удовлетворительного ответа на этот вопрос, например, для малых выборок.

Первый метод состоит в вычислении последовательных регрессий для моделей, содержащих все большие максимальные запаздывания, например,

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + b + \varepsilon_t,$$

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + b + \varepsilon_t,$$

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + a_3 z_{t-3} + b + \varepsilon_t.$$

Тогда можно либо сохранить лишь наиболее длинную регрессию, определяющую оцениваемые коэффициенты a_t^* с достаточной точностью, либо же остановиться, когда прибавление добавочного запаздывания изменяет порядки величин коэффициентов, оцененных в предыдущих регрессиях. Можно указать еще один метод того же типа, но несколько более строгий. А именно вводится последовательность дисперсионных критериев: фиксируя априори большое запаздывание h , можно последовательно проверить гипотезы:

$$H_1: a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, a_h = 0,$$

$$H_2: a_3 = 0, a_4 = 0, \dots, a_h = 0,$$

$$H_3: a_4 = 0, a_5 = 0, \dots, a_h = 0$$

(относительно вычислений см. гл. 7, § 6); останавливаются на первой принятой гипотезе H_0 , например, берется регрессия для z_t , z_{t-1} и z_{t-2} , если отбрасывается H_1 и не отбрасывается H_2 . На практике эти методы должны привести к близким результатам.

Однако эти методы не убедительны, так как они систематически отдают предпочтение моделям, в которые входят лишь первые запаздывающие значения. Вполне может случиться, что лишь треть или половина эффекта изменения экзогенной переменной обнаружится по окончании первого следующего за этим изменением периода, и тем не менее принимают модель:

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + b + \varepsilon_t.$$

Для этого достаточно, чтобы значения z_{t-2} , z_{t-3} , ..., z_{t-h} можно было выразить приближенно как фиксированные линейные комбинации z_t и z_{t-1} . Впрочем, удлинение периода наблюдения часто приводило бы к добавлению в принятую регрессию новых запаздываний. Так, H_1 можно не отбрасывать для выборки из двадцати последовательных наблюдений и отклонить для выборки из сорока наблюдений, так как последняя допускает большую точность.

Таким образом, следует учитывать априорные ограничения на a_t . Но это не влечет обязательно отказа от непосредственного выравнивания по методу наименьших квадратов модели с распределенными запаздываниями. В гл. 9, § 5 был изложен метод, который легко применяется в данном случае и обладает свойствами, уточненными в теореме 4 той же главы.

Запишем модель в форме:

$$x_t = a_0(\alpha) z_t + a_1(\alpha) z_{t-1} + \dots + a_h(\alpha) z_{t-h} + b + \varepsilon_t, \quad (25)$$

где α — вектор неизвестных параметров и $a_\tau(\alpha)$ — функция, определяющая значения, принимаемые коэффициентом a_τ для всего множества значений параметров. Например, в случае гипотезы экспоненциального распределения α имеет компонентами два параметра d и c , и $a_\tau(\alpha) = dc^\tau$.

Предположим вначале, что ε_t образуют чисто случайный стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 (гипотеза 1, гл. 6). Пусть, как и раньше, a_τ^* — коэффициенты, полученные с помощью линейной регрессии методом наименьших квадратов для формулы (3), и, значит, без учета конкретной спецификации a_τ . Ковариационная матрица для a_τ^* равна $(\sigma^2/T) M^{-1}$, где M означает квадратную матрицу порядка $h+1$, элемент которой в строке $\tau+1$ и в столбце $\theta+1$ равен

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_{t-\tau} - \bar{z}_{-\tau})(z_{t-\theta} - \bar{z}_{-\theta})$$

с

$$\bar{z}_{-\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_{t-\tau}.$$

Пусть a^* и $a(\alpha)$ — векторы с компонентами a_τ^* и $a_\tau(\alpha)$. Выравнивание оценки методом наименьших квадратов (25) приводит к тому, что для оценки α берется вектор, минимизирующий выражение:

$$[a^* - a(\alpha)]' M [a^* - a(\alpha)], \quad (26)$$

рассматриваемое как функция α .

Разумеется, вычисление этой оценки обычно не просто¹. Выражение (26) имеет вторую степень относительно $a_\tau(\alpha)$, но сами эти функции могут иметь высокую степень относительно компонент α . Более того, спецификация модели может предполагать неограниченное число запаздываний. Для применения предложенного здесь метода следует пренебречь запаздываниями, превосходящими некоторое число h периодов, выбранное произвольно. На практике это неудобство мало ощутимо, однако его необходимо упомянуть.

В качестве примера рассмотрим гипотезу экспоненциального распределения $a_\tau(\alpha) = dc^\tau$ и возьмем $h = 5$, чего вполне достаточно, если c не близко к 1. Выражение (26) имеет тогда вторую степень по d и десятую по c . Найти его минимум довольно трудно. Надо попытаться локализовать значения c и d , обращающие в нуль производные выражения (26), и выяснить, соответствуют они минимуму или максимуму. Для точного определения значений c и d можно будет использовать один из методов последовательных приближений гл. 9, § 4.

Вычисления ускоряются, если принять гипотезу арифметического убывания, например,

$$a_\tau = a_1 \left(1 - \frac{\tau-1}{h} \right) \quad \text{для } 1 \leq \tau \leq h,$$

¹ В данном случае предполагается, что z_t известны для моментов, предшествующих $t = 1$ (z_0, \dots, z_{1-h}). На практике дело обстоит не всегда так, и для первых значений модель принимает форму, отличную от (25). Анализ этой трудности дан в [172] и [6].

a_0 — любое и $a_\tau = 0$ для $\tau > h$. Для заданного значения h модель записывается в виде:

$$x_t = a_0 z_t + a_1 \sum_{\tau=1}^h \left(1 - \frac{\tau-1}{h}\right) z_{t-\tau} + b + \varepsilon_t.$$

Коэффициенты a_0 , a_1 и b оцениваются с помощью обычной множественной регрессии для

$$x_t = a_0 z_t + a_1 w_{ht} + b + \varepsilon_t,$$

где по определению

$$w_{ht} = \sum_{\tau=1}^h \left(1 - \frac{\tau-1}{h}\right) z_{t-\tau}.$$

Вычисления можно провести для последовательных значений h : 1, 2 и т. д. В конце концов берется выравнивание, дающее наименьшее значение сумме квадратов остатков¹, т. е. коэффициенту множественной корреляции R^2 .

Те же принципы применяются в случае полиномиальной гипотезы для a_τ , например $a_\tau = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots + \alpha_q \tau^q$, для $\tau = 0, 1, 2, \dots, h$, где коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ — оцениваемые параметры. Модель запишется тогда в виде:

$$x_t = \sum_{\theta=0}^q \alpha_\theta w_{\theta t} + b + \varepsilon_t$$

с новыми экзогенными переменными:

$$w_{\theta t} = \sum_{\tau=0}^h \tau^\theta z_{t-\tau}.$$

В работе [4] показано, что число оцениваемых параметров можно уменьшить на 2, если ввести естественную гипотезу о том, что полиномиальное представление принимает значение 0 за пределами двух крайних значений, т. е. для $\tau = -1$ и $\tau = h + 1$. Тогда достаточно представить a_τ в виде линейных комбинаций $q-1$ интерполяционных полиномов Лагранжа, которые равны нулю при $\tau = -1$ и $\tau = h + 1$.

До сих пор предполагалось, что ошибки ε_t подчинены чисто случайному стационарному процессу. Если это не так, то матрица ковариаций для a^* не равна $(\sigma^2/T) M^{-1}$. Можно, однако, применить этот же принцип оценки и в том случае, когда ошибки подчиняются стационарному процессу, зависящему лишь от малого числа неизвестных параметров.

Предположим, например, что ошибки подчинены авторегрессионному процессу первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

¹ Аналогично для оценки неизвестного параметра в распределении Паскаля можно минимизировать (26) относительно c и d для каждого значения r : $r = 0, 1, 2, \dots$ и взять то значение r , которое дает минимум (26), т. е. минимум суммы квадратов остатков.

В случае, когда мы пренебрегаем априорными ограничениями на a_τ , известны различные методы, позволяющие одновременно определить сходящиеся оценки $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_h, \tilde{b}$ и $\tilde{\rho}$ коэффициентов модели и параметра ρ (см. гл. 13, § 7 а, б и в). Мы знаем, что матрица асимптотических ковариаций для

$$\sqrt{T}\tilde{a}_0, \sqrt{T}\tilde{a}_1, \dots, \sqrt{T}\tilde{a}_h$$

равна пределу $\sigma^2 \cdot \tilde{M}^{-1}$, где \tilde{M} означает квадратную матрицу порядка $h+1$, элемент которой на пересечении строки $\tau+1$ и столбца $\theta+1$ равен

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(z_{t-\tau} - \bar{z}_{-\tau}) - \tilde{\rho}(z_{t-\tau-1} - \bar{z}_{-\tau-1})][(z_{t-\theta} - \bar{z}_{-\theta}) - \tilde{\rho}(z_{t-\theta-1} - \bar{z}_{-\theta-1})].$$

Таким образом, можно действовать, как и прежде, определяя α , минимизирующее

$$[\tilde{a} - a(\alpha)]' \tilde{M} [\tilde{a} - a(\alpha)]. \quad (27)$$

Это выражение заменяет (26), и его минимум вычисляется аналогично¹.

По этому поводу можно еще заметить, что в модели с распределенными запаздываниями коррелограмма, вычисленная для остатков некоторой множественной регрессии, дает обычно оценку, мало смещенную относительно коррелограммы ошибок.

Это следует из общих формул гл. 13, § 4 и особенно из формулы (22).

В самом деле, рассмотрим множественную регрессию для

$$x_t = a_0 z_t + a_1 z_{t-1} + \dots + a_h z_{t-h} + e_t.$$

Определенная соотношением (18) гл. 13 матрица M_{zz} имеет здесь специальную структуру, так как элемент строки $\theta+1$ и столбца $\theta'+1$ очень мало отличается от элемента строки θ и столбца θ' и оба они близки к $W_{\tau+\theta-\theta'}$, определенному следующим образом:

$$W_\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t z_{t+\tau}.$$

Итак, матрицы $M_{zz}^0, M_{zz}^1, M_{zz}^2$ близки соответственно к

$$\begin{bmatrix} W_0 & W_1 & W_2 & \dots & W_h \\ W_1 & W_0 & W_1 & \dots & W_{h-1} \\ W_2 & W_1 & W_0 & \dots & W_{h-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_h & W_{h-1} & W_{h-2} & \dots & W_0 \end{bmatrix},$$

¹ В [6] даны именно те вычисления, которые необходимы для применения предложенного здесь принципа оценки. Авторы показали также сходство между этим принципом и методом оценки, предложенным Э. Хэннаном [140].

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_0 & W_1 & \dots & W_{h-1} \\ W_2 & W_1 & W_0 & \dots & W_{h-2} \\ W_3 & W_2 & W_1 & \dots & W_{h-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{h+1} & W_h & W_{h-1} & \dots & W_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} W_2 & W_1 & W_0 & \dots & W_{h-2} \\ W_3 & W_2 & W_1 & \dots & W_{h-3} \\ W_4 & W_3 & W_2 & \dots & W_{h-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{h+2} & W_{h+1} & W_h & \dots & W_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть тогда P — перестановочная матрица:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица M_{zz}^1 мало отличается от $M_{zz}^0 P$, за исключением ее первого столбца; аналогично матрица M_{zz}^2 мало отличается от $M_{zz}^0 P^2$, за исключением ее двух первых столбцов. Отсюда следует, что R_1 , определенная формулой (19) гл. 13, мало отличается от P ; что R_2 мало отличается от P^2 , ... и что R_τ мало отличается от P^τ . Это приближение справедливо, только если τ мало по сравнению с h .

Множители

$$[\text{tr}(R_\tau R_\theta) - 2 \text{tr}(R_{\tau-\theta})],$$

которые входят в формулу (22) гл. 13, близки к

$$[\text{tr}(P^\tau + \theta) - 2 \text{tr}(P^{\tau-\theta})],$$

по крайней мере, если τ и θ остаются малыми по сравнению с h . Они будут, таким образом, близки к нулю, за исключением случаев $\theta = -\tau$ и $\theta = \tau$.

В целом, если γ_τ достаточно быстро стремится к нулю и если h достаточно велико, то формула (22) гл. 13 принимает вид:

$$E(C_\tau) \approx \gamma_\tau (1 - (h/T)).$$

Смещение с точностью до пропорциональности одно и то же для всех C_τ , и смещение приближенно равно нулю для первых членов коррелограммы остатков $\{r_\tau\}$.

5. Оценка методом наименьших квадратов авторегрессионной формы

Вместо изучения прямой формы модели с распределенными запаздываниями можно попытаться оценить неизвестные коэффициенты для авторегрессионной формы. Эта идея кажется заманчивой в случае, когда авторегрессионная форма имеет простой вид, т. е. когда коэффи-

циенты модели имеют экспоненциальное распределение или распределение Паскаля.

Авторегрессионная форма записывается, например, в виде:

$$x_t = cx_{t-1} + dz_t + e + \xi_t \quad (28)$$

при экспоненциальном распределении a_τ , $a_\tau = dc_\tau$; и в виде:

$$x_t = 2cx_{t-1} - c^2 x_{t-2} + dz_t + e + \xi_t, \quad (29)$$

если a_τ подчиняются распределению Паскаля с параметром $r = 1$. Тогда оценка методом наименьших квадратов для авторегрессионной формы вычисляется намного проще, чем оценки, рассмотренные в предыдущем параграфе. Для экспоненциального распределения достаточно применить обычные формулы регрессии, а в случае распределения Паскаля надо будет решить несколько более сложные уравнения.

Рассмотрим в качестве примера наиболее простой случай, когда $r = 1$. Авторегрессионная форма дается тогда уравнением (29). Отыскиваемые оценки должны минимизировать

$$\sum_t (x_t - 2cx_{t-1} + c^2 x_{t-2} - dz_t - e)^2. \quad (30)$$

Дифференцируя это выражение по c , d и e , получаем три необходимых условия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_t (x_{t-1} - cx_{t-2}) (x_t - 2cx_{t-1} + c^2 x_{t-2} - dz_t - e) &= 0, \\ \sum_t z_t (x_t - 2cx_{t-1} + c^2 x_{t-2} - dz_t - e) &= 0, \\ \sum_t (x_t - 2cx_{t-1} + c^2 x_{t-2} - dz_t - e) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которые запишем также в виде:

$$\left. \begin{aligned} -c^3 [x_{-2}^2] + 3c^2 [x_{-1} x_{-2}] + cd [x_{-2} z] - c ([xx_{-2}] + 2[x_{-1}^2]) - \\ - d [x_{-1} z] + [xx_{-1}] &= 0, \\ c^2 [x_{-2} z] - 2c [x_{-1} z] - d [z^2] + [xz] &= 0, \\ c^2 \bar{x}_{-2} - 2c\bar{x}_{-1} - d\bar{z} - e + \bar{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В этих уравнениях мы воспользовались следующими сокращенными обозначениями:

$$\bar{x}_{-2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{t-2}, \quad [x_{-1} x_{-2}] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_{t-1} - \bar{x}_{-1}) (x_{t-2} - \bar{x}_{-2}).$$

В системе (31) последнее соотношение дает значение e , если c и d определены; второе дает значение d , если c определено. Для вычисления c нужно уравнение, полученное исключением d из двух первых уравнений. Это уравнение третьей степени по c . Интерес представляют лишь

корни, по абсолютной величине меньшие 1. Если их несколько¹, надо взять тот, который минимизирует сумму (30). Тот же метод применим при любом r , приводя к уравнению степени $2r + 1$ по c .

Выше предполагалось, что значение r известно заранее. Однако это не всегда так, и тогда нужно оценить одновременно c , d и r . Наилучший метод состоит в получении оценки, как это делалось выше для различных значений r , например $r = 0, 1, 2$ и 3 , после чего для r берется то значение, которое минимизирует сумму квадратов остатков для модели с распределенными запаздываниями в ее первоначальной форме.

В работе [280] рекомендуется брать значение r , минимизирующее сумму квадратов остатков авторегрессионной формы. По всей видимости, первый метод дает лучшие результаты.

Свойства оценок, полученных выравниванием наименьших квадратов для авторегрессионной формы, вытекают из общих результатов предыдущей главы. Асимптотически оценки будут сходиться к истинным значениям, если влияющие на авторегрессионную форму ошибки ξ_t образуют чисто случайный процесс. Если это не так, то оценки будут иметь асимптотические смещения.

Однако нет априорных причин предполагать отсутствие автокорреляции ξ_t , за исключением того случая, когда спецификация модели приводит непосредственно к авторегрессионной форме. Но он в данной главе не рассматривается. Когда мы имеем дело с истинной моделью с распределенными запаздываниями, ξ_t являются преобразованиями ошибок ε_t . Уже в силу определяющего их преобразования они должны содержать некоторую автокорреляцию.

Для анализа этого затруднения рассмотрим модель с распределенными запаздываниями, коэффициенты которой подчинены распределению Паскаля, и примем, что влияющие на эту модель ошибки ε_t образуют авторегрессионный процесс первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

Мы знаем, что ξ_t , ε_t и η_t связаны между собой двумя следующими формулами, записанными с помощью символического оператора D :

$$\xi_t = (1 - cD)^{r+1} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = (1 - \rho D)^{-1} \eta_t$$

и, следовательно,

$$\xi_t = (1 - cD)^{r+1} (1 - \rho D)^{-1} \eta_t. \quad (32)$$

Эта зависимость определяет характеристики второго порядка случайного процесса ξ_t .

В частности, если принять, что ε_t образуют чисто случайный процесс ($\rho = 0$), то ξ_t образуют процесс скользящих средних, коррелограм-

¹ Известно, что существует один корень, стремящийся по вероятности к истинному значению c , модуль которого меньше 1. Но нельзя быть уверенным заранее, что в произвольной выборке уравнение третьей степени будет иметь решение, содержащееся между 0 и 1. Метод не подходит, если такого решения нет. Тогда следует воспользоваться каким-нибудь способом оценки.

ма которого зависит от значения c . Так, для экспоненциального распределения ($r = 0$) первый коэффициент коррелограммы равен

$$\frac{-c}{1+c^2},$$

остальные равны нулю; для $r = 1$ два первых коэффициента соответственно равны:

$$\frac{-2c(1+c^2)}{1+4c^2+c^4} \text{ и } \frac{c^2}{1+4c^2+c^4},$$

остальные равны нулю. Так как c практически всегда положительно, ξ_t дают преимущественно отрицательную автокорреляцию.

При положительной зависимости ε_t ($\rho > 0$) формула (32) усложняется. Тем не менее можно заметить, что для больших положительных значений c автокорреляция ξ_t будет менее сильной, чем в том случае, когда между ε_t нет зависимости. Ограничимся изучением ситуации с экспоненциальным распределением коэффициентов. Нетрудно вычислить значение коэффициента автокорреляции порядка k :

$$\rho^{k-1} \frac{\rho(1+c^2) - c(1+\rho^2)}{(1+c^2) - 2c\rho}.$$

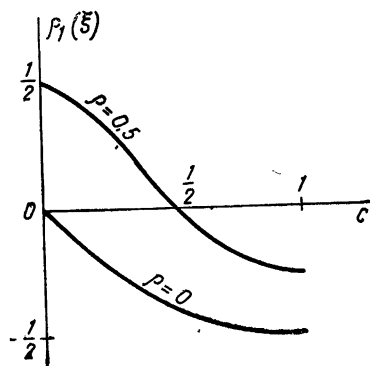


Рис. 3

Как показывает формула (32), ξ_t образуют чисто случайный процесс, когда $c = \rho$. Автокорреляция ξ_t положительна, когда $c < \rho$, и отрицательна, когда $c > \rho$. В последнем случае первый коэффициент автокорреляции по абсолютной величине меньше при $\rho = 0$. Рис. 3 дает изменение этого коэффициента в функции c для $\rho = 0$ и для $\rho = 1/2$.

Иногда заранее кое-что известно относительно зависимости ошибок ε_t , описывающих влияние на эндогенную переменную x_t совокупности факторов, отличных от z_t . Может оказаться правдоподобным отсутствие автокорреляции ошибок. Тогда нужно иметь в виду, что ошибки ξ_t авторегрессионной формы имеют тем большую отрицательную автокорреляцию, чем большее значение имеет c . В других случаях есть основания предполагать некоторую зависимость ε_t и тогда автокорреляцию ξ_t можно считать слабой.

Во всяком случае, величина асимптотического смещения зависит от последовательности экзогенных переменных z_t . В гл. 14 было показано, что это смещение мало, когда флуктуации экзогенной переменной велики по отношению к рассеянию ошибок ξ_t . Дисперсия ξ_t сама пропорциональна дисперсии ε_t , причем коэффициент пропорциональности является функцией ρ , c и r . Таким образом, возможно, что в конкретных приложениях асимптотическое смещение будет мало.

В предыдущей главе мы видели, что асимптотические свойства дают неполные сведения о качестве оценок для малых выборок. В случае ма-

лых выборок выравнивание наименьших квадратов имеет обычно тенденцию занижать c , независимо от наличия связи между ξ_t . Отрицательная автокорреляция этих ошибок должна в какой-то мере усилить это занижение.

Несмотря на указанные недостатки, выравнивание по методу наименьших квадратов для авторегрессионной формы является иногда наилучшим методом оценки модели, коэффициенты которой следуют экспоненциальному распределению или распределению Паскаля. В самом деле, этот метод имеет два важных преимущества: он прост в вычислительном отношении и обладает достаточно хорошей эффективностью. Последнее связано с тем, что он дает оценки, дисперсии которых меньше дисперсий других оценок, а смещения во многих случаях не очень значительны.

6. Другие оценки для авторегрессионной формы

Для оценки авторегрессионной формы можно использовать и другие методы.

а) Если известна точная форма зависимости ошибок ξ_t авторегрессионной формы, то выравнивание методом наименьших квадратов можно применять не к переменным $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-r-1}, z_t$, а к *преобразованным переменным*. Например, если известно, в случае экспоненциального распределения, что в первом приближении ξ_t подчиняются авторегрессионному процессу первого порядка:

$$\xi_t = \lambda \xi_{t-1} + \zeta_t$$

с известным коэффициентом λ , то можно вычислить регрессию x_t — λx_{t-1} относительно $x_{t-1} - \lambda x_{t-2}$ и $z_t - \lambda z_{t-1}$. Таким образом, можно устранить асимптотическое смещение по крайней мере в первом приближении.

Однако столь благоприятные ситуации редки в конкретном моделировании. Во-первых, очень трудно сформулировать точные гипотезы относительно зависимости влияющих на модель ошибок ε_t . Во-вторых, форма связи ξ_t зависит одновременно от связи ε_t и от истинного значения параметра c , который мы как раз и пытаемся оценить.

Зато может оказаться интересным *узнать, будут ли результаты оценки чувствительны к гипотезам относительно зависимости ξ_t* . С этой целью выравнивание значений переменных можно сравнить с двумя другими процедурами. Одна из них для

$$x_t - x_{t-1}, \quad x_{t-1} - x_{t-2}, \dots, x_{t-r-1} - x_{t-r-2}, \quad z_t - z_{t-1}$$

обнаруживает эффект заметной положительной связи ξ_t ; другая для

$$x_t + x_{t-1}, \quad x_{t-1} + x_{t-2}, \dots, x_{t-r-1} + x_{t-r-2}, \quad z_t + z_{t-1}$$

дает эффект заметной отрицательной связи. Если все три процедуры выравнивания дают близкие результаты, то есть основания полагать, что зависимость ξ_t не существенна.

Если это не так, то в принципе можно рассмотреть *одновременную оценку параметров модели и зависимости ξ_t* . Однако такие методы име-

ют лишь ограниченный практический интерес. Во-первых, вид процесса, которому подчиняются ξ_t , довольно сложен (см., например, формулу (32)). Во-вторых, для не очень больших выборок эти методы приводят к менее точным оценкам, чем прямое выравнивание (см. гл. 14, § 6, в).

Во всяком случае, первое затруднение не влияет на оценку методом инструментальных переменных z_t и z_{t-1} . Формулы гл. 14, § 6 применяются непосредственно в случае экспоненциального распределения коэффициента. Аналогично оценка

$$x_t = 2cx_{t-1} - c^2 x_{t-2} + dz_t + e + \xi_t$$

приводит к системе:

$$\left. \begin{aligned} [xz] - 2c[x_{-1}z] + c^2[x_{-2}z] - d(z^2) &= 0, \\ [xz_{-1}] - 2c[x_{-1}z_{-1}] + c^2[x_{-2}z_{-1}] - d[zz_{-1}] &= 0, \\ \bar{x} - 2c\bar{x}_{-1} + c^2\bar{x}_{-2} - d\bar{z} - e &= 0, \end{aligned} \right\}$$

что в свою очередь приводит к уравнению второй степени по c . Для распределения Паскаля необходимо решать уравнение степени $r + 1$ по c . Таким образом, вычисления здесь проще, чем при выравнивании методом наименьших квадратов, требующем решения уравнения степени $2r + 1$. К сожалению, следует опасаться, что точность оценок будет не очень удовлетворительной даже для выборок порядка пятидесяти наблюдений.

Для упрощения вычислений при выравнивании авторегрессионной формы в работе [280] предложено использовать инструментальные переменные z_t и z_{t-1} , что приводит к уравнению степени $r + 1$ относительно c . Дисперсии полученных таким образом оценок больше дисперсий оценок по методу наименьших квадратов (за исключением случая $r = 0$, когда оба метода совпадают); по-видимому, эти дисперсии не превосходят дисперсий оценок, полученных с помощью инструментальных переменных z_t и z_{t-1} . Однако в случае зависимости ξ_t использование z_t и x_{t-1} приводит к асимптотическим смещениям.

б) В процессе оценки модели, по-видимому, следует принимать во внимание связь корреляций ξ_t со значением коэффициента c . Изложенные ранее методы этого совсем не учитывают. В [183] и [172] разработан более удовлетворительный с этой точки зрения метод. Здесь мы ограничимся случаем экспоненциального распределения коэффициентов и предложим читателю обратиться к работе [280], где дано обобщение на случай распределения Паскаля.

Итак, вновь рассмотрим модель:

$$x_t = d \sum_{\tau=0}^{\infty} c^{\tau} z_{t-\tau} + b + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Ее можно записать в виде:

$$(x_t - \varepsilon_t) = c(x_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) + dz_t + e, \quad (33)$$

где $e = b(1 - c)$. Соотношение (16) есть не что иное, как авторегрессионная форма, в которой ошибка ξ_t выражена в виде явной функции от

ошибок ε_t и ε_{t-1} первоначальной модели. Но это соотношение записано так, что ε_t и ε_{t-1} можно рассматривать как «ошибки в переменных» x_t и x_{t-1} . Это объясняет, почему мы обратились для оценки к взвешенной регрессии, определенной в гл. 10.

Предположим еще, что ε_t подчинено авторегрессионному стационарному процессу первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

Соотношение (33) можно преобразовать к виду:

$$(u_t - \eta_t) = c(u_{t-1} - \eta_{t-1}) + dw_t - f, \quad (34)$$

где

$$f = (1 - \rho)e; \quad u_t = x_t - \rho x_{t-1} \text{ и } w_t = z_t - \rho z_{t-1}.$$

Итак, u_t и w_t являются преобразованными переменными для x_t и z_t . Они известны, если известно ρ ; они совпадают с x_t и z_t , если ε_t образуют чисто случайный процесс ($\rho = 0$).

Рассмотрим вначале случай, когда ρ известно. Соотношение (34) можно рассматривать тогда как модель с ошибками в переменных, в которой матрица ковариаций переменных u_t , u_{t-1} и w_t будет иметь вид:

$$\Omega = \sigma_\eta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это исключительно благоприятная ситуация, так как матрица зависит лишь от мультипликативной постоянной. Сходящиеся и, безусловно, достаточно эффективные оценки для c , d и f получены с помощью взвешенной регрессии, построенной с этой матрицей Ω . Для переменных u_t , u_{t-1} и w_t следует выполнять операции, определенные в (1), (2) и (3), § 4, гл. 10.

В действительности модель (34) содержит одну особенность, которой мы здесь не учли. Если (34) рассматривать как модель с ошибками в переменных для векторов с тремя компонентами (u_t, u_{t-1}, w_t) , то последовательные наблюдения не будут независимыми, так как первая компонента (u_t, u_{t-1}, w_t) необходимо равна второй компоненте (u_{t+1}, u_t, w_{t+1}) . Это замечание справедливо одновременно для вектора наблюдаемых значений (u_t, u_{t-1}, w_t) , вектора ошибок $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, 0)$ и вектора «истинных значений» $(u_t - \varepsilon_t, u_{t-1} - \varepsilon_{t-1}, w_t)$. Как показано в работе [6], то, что это ограничение не учтено, не влияет на асимптотическую сходимость оценок, но уменьшает эффективность метода.

Если не реалистично предполагать, что ошибки ε_t образуют чисто случайный процесс, то следует все же принять во внимание, что характеризующий их коэффициент неизвестен. Л. Койк [183] предлагает испытывать различные значения ρ и смотреть, не будут ли при этом изменяться оценки c , d , e . Он констатировал на многих конкретных примерах, что оцениваемые коэффициенты очень мало ме-

няются в зависимости от ρ и что зависимость ошибок, таким образом, не существенна.

В том случае, когда это не так, лучшей оценкой ρ и коэффициентов c , d и e , будет, безусловно, та, которая минимизирует сумму квадратов остатков по отношению к уравнению с распределенными запаздываниями, записанному в преобразованных переменных:

$$u_t = x_t - \rho x_{t-1} \text{ и } w_t = z_t - \rho z_{t-1}.$$

Тогда из всех испытанных значений ρ выбирают то, которое минимизирует эту сумму. Окончательные оценки коэффициентов будут те, которые используют это значение. Другой принцип оценки, предложенный для определения ρ , по-видимому, не приводит к интересным результатам (см. по этому вопросу [206]).

Такой анализ моделей с распределенными запаздываниями приводит к мысли, что свойства различных рассмотренных нами методов изучены пока недостаточно. В связи с трудностями создания законченной теории было бы целесообразно экспериментировать с этими методами и на искусственных выборках, чтобы лучше оценить их относительные достоинства.

МОДЕЛИ ИЗ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ**ГЛАВА 16. МОДЕЛИ ИЗ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Экономическая теория во многих областях рекомендует использовать модели из нескольких эндогенных величин и нескольких соотношений. Эти величины рассматриваются как взаимозависимые, т. е. они определяются одновременно из всей совокупности отношений модели. Логический смысл этой взаимозависимости был рассмотрен в гл. 2, § 6. Поэтому нет смысла снова возвращаться к этому.

В трех предыдущих частях статистические методы излагались без достаточно строгих ссылок на множественность отношений. Иногда допускалось, что модель содержит лишь одну эндогенную переменную. Разработанные методы часто применялись без особых изменений к моделям с несколькими эндогенными переменными. Было естественно воспользоваться ими для упрощенного анализа и мы не касались некоторых осложнений, которые неизбежно возникают в модели из нескольких уравнений. Этот пробел необходимо восполнить.

В пятой части книги будет предполагаться, что модель является линейной по отношению к наблюдаемым переменным, а ошибки включаются в уравнение аддитивно. Таким образом, мы будем исследовать линейные модели с ошибками в уравнениях — единственными серьезно изученными в эконометрии. Роль линейности отношений и аддитивности ошибок была изучена ранее в такой мере, чтобы читатель представлял себе, в каком случае и какой ценой можно сохранить принятую форму модели с отличающейся от этой формы первоначальной спецификацией.

Перед тем как перейти к проблемам статистической методологии, будет полезно уточнить некоторые общие понятия и оценить роль моделей из систем уравнений в эконометрии. В этом и будет заключаться содержание настоящей главы.

1. Структурные и приведенные уравнения

Для уточнения понятий, используемых в этой части книги, полезно в качестве примера рассмотреть классическое исследование [120] спроса на пищевые продукты в Соединенных Штатах.

Помимо переменной t , обозначающей год, используемая модель содержит следующие переменные:

x_{1t} — потребление пищевых продуктов на душу населения в году t ;
 x_{2t} — индекс розничных цен на пищевые продукты, деленный на общий индекс розничных цен;

x_{3t} — среднедушевой реальный доход;

x_{4t} — среднедушевое производство сельскохозяйственных пищевых продуктов;

x_{5t} — индекс цен, выплачиваемых сельскохозяйственным производителям за сельскохозяйственные пищевые продукты, деленный на общий индекс розничных цен;

z_{2t} — капиталовложения на душу населения.

Различные законы, существование которых признается в модели, выражены пятью уравнениями. Точнее, спрос на пищевые продукты рассматривается как функция розничных цен, доходов, в текущем и прошлом периодах и временной тенденции:

$$x_{1t} = \beta_{12} x_{2t} + \beta_{13} x_{3t} + \delta_{13} x_{3, t-1} + \gamma_1 t + \lambda_1 + \eta_{1t}, \quad (1)$$

где β_{12} , β_{13} , δ_{13} , γ_1 и λ_1 — неизвестные коэффициенты, а η_{1t} — случайная ненаблюдаемая ошибка. Предложение пищевых продуктов на розничном рынке является функцией розничных цен, производства сельскохозяйственных продуктов и временной тенденции:

$$x_{1t} = \beta_{22} x_{2t} + \beta_{24} x_{4t} + \gamma_2 t + \lambda_2 + \eta_{2t}. \quad (2)$$

Доходы зависят от доходов предыдущего периода и капиталовложений текущего периода:

$$x_{3t} = \delta_{33} x_{3, t-1} + \gamma_{32} z_{2t} + \lambda_3 + \eta_{3t}. \quad (3)$$

Производство сельскохозяйственных пищевых продуктов является функцией цен на продукты в текущем и предыдущем периодах, а также автономной тенденции:

$$x_{4t} = \beta_{45} x_{5t} + \delta_{45} x_{5, t-1} + \gamma_4 t + \lambda_4 + \eta_{4t}. \quad (4)$$

Цены на сельскохозяйственные пищевые продукты зависят от розничных цен и от автономной тенденции:

$$x_{5t} = \beta_{52} x_{2t} + \gamma_5 t + \lambda_5 + \eta_{5t}. \quad (5)$$

Наконец, предполагается, что чистые капиталовложения определяются вне модели, независимо от предложения и спроса на пищевые продукты.

Таким образом, модель включает пять эндогенных переменных x_{it} и три экзогенные переменные — время t , капиталовложения z_{2t} и вспомогательную переменную, всегда равную 1. Кроме того, три уравнения содержат значения располагаемого дохода и цен на сельскохозяйственные продукты с запаздыванием. Модели можно придать следующую, более компактную, матричную форму:

$$Bx_t + Cz_t + Dx_{t-1} + \eta_t = 0, \quad (6)$$

где x_t и η_t — векторы из пяти компонент x_{it} и η_{it} ($i = 1, 2, \dots, 5$); z_t — вектор из трех компонент ($t, z_{2t}, 1$); B, C и D — матрицы, состоящие из коэффициентов при переменных в различных уравнениях:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 \\ -1 & \beta_{22} & 0 & \beta_{24} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \beta_{45} \\ 0 & \beta_{52} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \lambda_1 \\ \gamma_2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \gamma_{32} & \lambda_3 \\ \gamma_4 & 0 & \lambda_4 \\ \gamma_5 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения (1)—(5) должны объяснять значения эндогенных переменных в зависимости от значений экзогенных переменных и ошибок. Их можно решить по отношению к эндогенным переменным, таким образом приходим к новой системе, в которой каждая из этих переменных будет записана как явная функция z_{jt} и η_{it} . Преобразование можно выразить на основе матричной формы (6), которая эквивалентна:

$$x_t = Az_t + B_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (8)$$

где матрица A , B_1 и векторы ε_t определяются равенствами:

$$A = -B^{-1}C; \quad B_1 = -B^{-1}D; \quad \varepsilon_t = -B^{-1}\eta_t. \quad (9)$$

Записав модель в этой новой форме, видим, что она принадлежит к категории моделей, которые изучались до сих пор, поскольку вектор эндогенных переменных x_t является линейной функцией вектора экзогенных переменных z_t , вектора эндогенных переменных с запаздыванием x_{t-1} и случайного ненаблюдаемого вектора ε_t . Действительно, можно свести статистическое исследование моделей из системы уравнений к исследованию моделей множественной регрессии или авторегрессионных моделей. Но следует строго различать формы (6) и (8) и не забывать о проблемах, которые могут возникнуть в связи с переходом от одной формы к другой.

Обобщая, следует сказать, что линейные модели с ошибками в уравнениях могут содержать n эндогенных переменных x_{it} ($i = 1, 2, \dots, n$), m экзогенных переменных z_{jt} ($j = 1, 2, \dots, m$) и значений эндогенных переменных с запаздыванием. Как и рассмотренные выше уравнения (1)—(5), каждое из введенных в модель уравнений отражает особый тип поведения или отношений. Поэтому их называют «структурными уравнениями». Модель в этом случае имеет форму, ана-

логичную форму системы (6). В результате решения структурные уравнения можно преобразовать в n «*приведенных уравнений*», в каждом из которых эндогенная переменная выражена как функция предопределенных переменных и ошибок. В этом случае модель принимает форму, аналогичную форме системы (8).

Действительно, на основе линейных комбинаций уравнений (6) можно получить множество эквивалентных систем. Если P представляет собой произвольную квадратную невырожденную матрицу порядка n , то система $PBx_t + PCz_t + PDx_{t-1} + P\eta_t = 0$ будет эквивалентна как (6), так и (8). Однако эти две последние формулировки играют особую роль. Приведенные уравнения наиболее удобны для расчета значений эндогенных переменных. Структурные уравнения представляют наибольший интерес при выявлении основополагающих законов системы, если мы хотим их идентифицировать каждый в отдельности.

Для оценки этих моделей естественно обратить внимание на приведенные уравнения, прямо определяющие закон условного распределения вероятностей эндогенных переменных для заданных значений предопределенных переменных. Действительно, изучаемые статистические методы будут в ряде случаев включать в себя определение коэффициентов приведенных уравнений. Однако во всех случаях нужно стремиться получить оценки коэффициентов структурных уравнений, так как только они имеют точный экономический смысл.

Так, в рассматриваемой здесь модели желательно найти оценку β_{12} — коэффициента, характеризующего эластичность спроса на пищевые продукты по отношению к ценам. Знать величину этого коэффициента необходимо для ответа на целый ряд вопросов. Одни только приведенные уравнения не всегда могут помочь. Предположим, например, что изучается возможность введения налога или субсидии на пищевые продукты. От уравнения (5) нужно отказаться и заменить его новым отношением между ценами производства и розничными ценами. Четыре других структурных уравнения модели сохранят свою силу и будут давать требуемую информацию по крайней мере в том случае, если известны значения их коэффициентов. Наоборот, приведенные уравнения уже нельзя будет использовать, так как изменение отношения (5) отразится на всех их коэффициентах.

Здесь мы снова сталкиваемся (применительно к моделям с ошибками в уравнениях) с проблемой, которая в общих терминах была уже изложена в гл. 2, § 10. Если нужно использовать модель в ситуациях, несколько отличающихся от той, к которой относятся исходные данные, то важно идентифицировать структуру модели и в общем случае нельзя ограничиться оценкой условного распределения эндогенных переменных. (Более полное изложение этой проблемы см. в [215].)

Следует заметить, что при использовании общих форм (6) и (8) можно упустить из виду важный элемент проблемы. Матрицы B , C и D не являются произвольными. Необходимо оценить только часть их элементов, остальные являются специфицированными априори. Это ясно видно, если рассмотреть выражения (7). Матрица B имеет не 25 неизвестных элементов, а только 6. Можно также сказать, что

V является квадратной матрицей порядка 5, подчиненной следующим «априорным ограничениям».

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{33} = \beta_{44} = \beta_{55} &= -1, \\ \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{23} = \beta_{25} = \beta_{31} = \beta_{32} = \beta_{34} = \beta_{35} &= 0, \\ \beta_{41} = \beta_{42} = \beta_{43} = \beta_{51} = \beta_{53} = \beta_{54} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Помимо чистых условий нормализации эти ограничения, отражают некоторые гипотезы относительно основных законов модели. Так, известно, что объем сельскохозяйственного производства и цены производства не влияют на спрос домашних хозяйств и что их, следовательно, не следует включать в первое уравнение.

Точно так же матрицы C и D зависят соответственно от 10 и 3 неизвестных параметров, а не от 15 и 25, как это можно было бы подумать исходя из формы (6). В целом модель содержит только 19 неизвестных параметров по крайней мере, если в данный момент не учитываются параметры, от которых может зависеть распределение случайных членов.

Априорные ограничения можно легко сформулировать для структурных уравнений. Но они, очевидно, влияют также и на приведенные уравнения. 40 коэффициентов матриц A и B_1 не являются произвольными. В действительности они зависят лишь от 19 неизвестных параметров модели. Матрицы приведенных форм имеют меньше элементов, чем матрицы структурной формы. Таким образом, может случиться, что наличие ограничений на коэффициенты структурных уравнений не приведет ни к каким ограничениям на коэффициенты приведенных уравнений. В данном примере, однако, дело обстоит иначе.

Некоторые из ограничений на матрицы A и B являются очень простыми. Так, модель содержит значения с запаздыванием только переменных x_3 и x_5 . Таким образом, в матрице B_1 15 коэффициентов при $x_{1,t-1}$, $x_{2,t-1}$ и $x_{4,t-1}$ обязательно будут равны нулю. Кроме того, структурное уравнение (3) уже имеет приведенную форму; сразу видно, что в это уравнение не входят $x_{5,t-1}$ и t ; следовательно, a_{31} и $b_{1,35}$ равны нулю. Таким образом, из 21 ограничения на A и B_1 17 являются очень простыми. Но 4 последних — более сложные.

Оценка приведенной формы основывается на принципах, уже изложенных при изучении множественных регрессий и авторегрессионных моделей. Но наличие ограничений на коэффициенты значительно усложняет проблему. Поэтому будем делать различие между «*переопределенными моделями*» и «*простыми моделями*» в зависимости от того, существуют или нет ограничения для приведенных уравнений.

Поскольку число коэффициентов структурной формы иногда превышает число коэффициентов приведенной формы, то не всегда можно однозначно определить первые на основе вторых. В соответствии с приведенным в гл. 2 общим определением будем говорить, что модель не является «*идентифицируемой*», если коэффициенты структурной формы нельзя определить однозначно.

Прежде чем перейти к систематическому исследованию вышеприведенных понятий, проиллюстрируем их на примере некоторых эконо-

метрических проблем, для исследования которых были использованы модели из систем уравнений. Рассматривая функцию потребления, мы уже видели, почему не всегда можно ограничиться изучением одного, отдельно взятого уравнения, даже если оно представляет собой единственный объект эконометрического исследования (см. гл. 4, § 3).

2. Спрос и предложение. Проблемы идентификации

Еще перед первой мировой войной некоторые экономисты пытались эмпирически определить законы спроса, связывая объем спроса на определенный продукт с ценой на него. Для этого они использовали статистические временные ряды, отражавшие потребленные количества и цены в одной и той же стране за различные периоды времени (Х. Уоркинг [338] приводит библиографию этих первых работ). Некоторые из полученных результатов кажутся удивительными. Например, спрос на чугун растет с ростом цены [221].

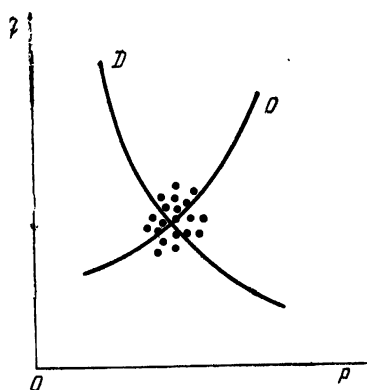


Рис. 1

Э. Уоркинг [337] первый ясно показал, что производившиеся выравнивания не обязательно выявляли законы спроса. Действительно, согласно общепринятым идеям цена и потребленное количество продукта определяются одновременно в результате сопоставления спроса потребителей и предложения производителей. Это положение часто изображается на графиках,

где по оси абсцисс нанесены цены, по оси ординат — количества. Нисходящая кривая D определяет количества, запрашиваемые по различным ценам, восходящая кривая O — предлагаемые количества. Равновесие устанавливается в точке пересечения этих двух кривых.

Несомненно, эта теоретическая схема лишь приближенно соответствует фактическому положению. На предложение и спрос, кроме цен, могут воздействовать и другие факторы. Но если влияние этих факторов будет слабым, наблюдаемая точка должна быть расположена вблизи от пересечения двух кривых D и O . Совокупность данных наблюдения для ряда периодов должна определять облако точек вокруг этого пересечения и не может дать представления о форме кривой спроса (см. рис. 1).

Это положение можно представить с помощью случайной линейной модели. Действительно, пусть существуют два отношения:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= b_1 p_t + f_1 + \eta_{1t} \\ q_t &= b_2 p_t + f_2 + \eta_{2t} \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

описывающие соответственно предложение и спрос, где b_1 , b_2 , f_1 , f_2 — фиксированные неизвестные коэффициенты, η_{1t} и η_{2t} — случайные

члены с равными нулю средними, отражающие влияние неидентифицированных факторов. Система (11) определяет модель в ее структурной форме. Эту систему можно решить относительно p_t и q_t , поскольку в соответствии с гипотезой предложение и спрос имеют одну единственную общую точку ($b_1 \neq b_2$). Решение приводит к приведенной системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= a_{10} + \varepsilon_{1t} \\ p_t &= a_{20} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

где

$$a_{10} = \frac{b_2 f_1 - b_1 f_2}{b_2 - b_1}; \quad a_{20} = \frac{f_1 - f_2}{b_2 - b_1};$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{b_2 \eta_{1t} - b_1 \eta_{2t}}{b_2 - b_1}; \quad \varepsilon_{2t} = \frac{\eta_{1t} - \eta_{2t}}{b_2 - b_1}.$$

Эти два уравнения ясно показывают, что количество и цена должны принимать значения, распределяющиеся случайно вокруг a_{10} и a_{20} , определяющих координаты точки пересечения q среднего предложения (O) и среднего спроса (D).

Выборка из наблюдений за p_t и q_t (для $t = 1, 2, \dots, T$) позволяет определить более или менее точно a_{10} и a_{20} и закон распределения пары $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$. Но ее недостаточно для определения коэффициентов b_1, f_1, b_2, f_2 и закона распределения (η_{1t}, η_{2t}) . Две зависимости, которые определяют a_{10} и a_{20} , нельзя однозначно разрешить относительно b_1, f_1, b_2, f_2 . Если коэффициенты приведенных уравнений определены, то коэффициенты структурных уравнений имеют еще две степени свободы. Таким образом, *структурные соотношения предложения и спроса нельзя идентифицировать*.

На практике положение не всегда бывает столь неблагоприятным. Для многих сельскохозяйственных продуктов, действительно, наблюдается обратная связь между ценой и потребляемым количеством. Это последнее обуславливается поведением потребителей: меняющийся от года к году урожай должен реализовываться по такой цене, чтобы потребители смогли реализовать его полностью. В этом случае на рынке существуют стабильный спрос (линия D на рис. 2) и предложение, смещающееся вверх или вниз в зависимости от величины урожая (линия O_1, O_2, O_3 и т. д.). Облако точек наблюдения за ряд лет будет распределяться вокруг кривой спроса и даст представление о ее положении.

Поскольку изменения предложения отражают изменения метеорологических условий, можно допустить существование индекса θ_t , измеряющего состояние этих условий в году t . Случайную модель спро-

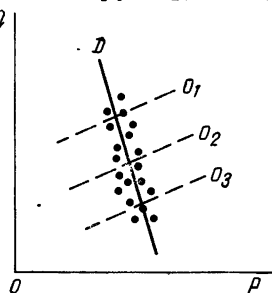


Рис. 2

са и предложения в этом случае можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= b_1 p_t + c_1 \theta_t + f_1 + \eta_{1t}, \\ q_t &= b_2 p_t + \quad \quad \quad f_2 + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В результате решения системы этих двух структурных уравнений приходим к приведенным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= a_{11} \theta_t + a_{10} + \varepsilon_{1t}, \\ p_t &= a_{21} \theta_t + a_{20} + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{b_2 c_1}{b_2 - b_1}; \quad a_{10} = \frac{b_2 f_1 - b_1 f_2}{b_2 - b_1}; \quad a_{21} = \frac{c_1}{b_2 - b_1}; \\ a_{20} &= \frac{f_1 - f_2}{b_2 - b_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Приведенные уравнения ясно показывают, что точка наблюдения зависит одновременно от случайных факторов и более или менее благоприятных метеорологических условий в рассматриваемом году.

Поскольку θ_t является наблюдаемой величиной, коэффициенты системы приведенных уравнений a_{11} , a_{10} , a_{21} , a_{20} можно оценить. Для этого достаточно иметь в распоряжении выборку, содержащую наблюдаемые значения q_t , p_t и θ_t за определенное число лет. Коэффициенты спроса b_2 и f_2 являются идентифицируемыми, поскольку их можно рассчитать на основе a_{11} , a_{10} , a_{21} и a_{20} . Действительно, если $a_{21} \neq 0$, — что можно допустить в данный момент, — отношения (15) предполагают: $b_2 = a_{11}/a_{21}$, $f_2 = a_{10} - b_2 a_{20}$.

Однако эти отношения не позволяют однозначно определить коэффициенты предложения b_1 , c_1 и f_1 на основе a_{11} , a_{10} , a_{21} , a_{20} , так как сохраняется одна степень свободы.

Мы предположили здесь, что был выявлен и наблюдаем действующий на предложение автономный фактор θ_t . В противном случае мы пришли бы к предыдущему положению, и влияние метеорологических условий было бы приравнено к случайным возмущениям. Однако форма облака точек в этом случае наводит на мысль, что на изучаемое явление оказывает систематическое влияние некоторый важный фактор. Этот фактор необходимо было бы обнаружить. Мы бы легко выяснили его происхождение и заметили, что он влияет только на предложение, но не на спрос. В этом случае можно было бы использовать данные для определения спроса.

Здесь необходимо сделать два замечания. С одной стороны, тот факт, что облако точек является вытянутым, сам по себе не может гарантировать, что наблюдаемая зависимость отражает реакцию спроса на изменение цен. Априори систематический фактор может с таким же успехом влиять на спрос, как и на предложение. Две кривые O и D могут смещаться одновременно, и облако точек вытянется вдоль пути смещения точки пересечения (см. рис.3). Если мы решили, что этот путь описывает кривую спроса, то только в силу обоснованности допущения о независимости спроса от метеорологических условий.

С другой стороны, даже если спрос стабилен, а предложение меняется, оценка кривой D ставит проблемы, к которым мы вернемся в следующем параграфе.

Может также случиться, что как спрос, так и предложение будут зависеть не только от цен, но и от других факторов. На двухмерном графике облако точек уже не будет иметь никакой точной формы. Но этот факт, очевидно, не исключает возможности идентификации отношений спроса и предложения. Действительно, некоторые из допускающих идентификацию факторов, воздействуя на предложение, могут никак не влиять на спрос, другие, воздействуя на спрос, могут не влиять на предложение. Этого достаточно для идентификации двух рассматриваемых законов.

В качестве примера допустим, что спрос зависит от получаемого домашними хозяйствами дохода R_t , и система структурных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= b_1 p_t + c_1 \theta_t + f_1 + \eta_{1t}, \\ p_t &= b_2 p_t + c_2 R_t + f_2 + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

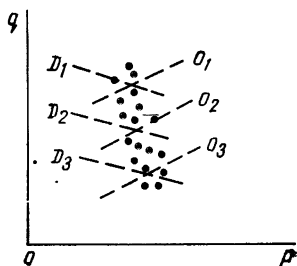


Рис. 3

В этом случае система приведенных уравнений запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= a_{11} \theta_t + a_{12} R_t + a_{10} + \varepsilon_{1t}, \\ p_t &= a_{21} \theta_t + a_{22} R_t + a_{20} + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{b_2 c_1}{b_2 - b_1}, & a_{12} &= \frac{-b_1 c_2}{b_2 - b_1}, & a_{10} &= \frac{b_2 f_1 - b_1 f_2}{b_2 - b_1}, \\ a_{21} &= \frac{c_1}{b_2 - b_1}, & a_{22} &= \frac{-c_2}{b_2 - b_1}, & a_{20} &= \frac{f_1 - f_2}{b_2 - b_1}. \end{aligned} \right\}$$

Если известны a_{ij} , то при $a_{21} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ можно однозначно определить структурные коэффициенты, так как в этом случае предыдущая система идентична системе:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= a_{12}/a_{22}, & b_2 &= a_{11}/a_{21}, & c_1 &= a_{21}(b_2 - b_1), \\ c_2 &= -a_{22}(b_2 - b_1), & f_1 &= a_{10} - b_1 a_{20}, & f_2 &= a_{10} - b_2 a_{20}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, коэффициенты модели (16) допускают идентификацию.

3. Оценка законов спроса ¹

Вернемся к наиболее простому случаю, допускающему идентификацию спроса, — когда облако точек распределяется вокруг кривой стабильного спроса (см. рис. 2). Свойства различных возможных оценок зависят, очевидно, от стохастической модели, которая считается

¹ По этому вопросу см. [275], [326] и [265]. В последней работе подводятся итоги различных эконометрических работ во Франции.

адекватной. Этот факт совершенно не был учтен в первых работах по оценке законов спроса. В экономической литературе впервые он был ясно изложен Х. Уоркингом [338]. Этот автор, в частности, подчеркивал роль ошибок в переменных (которая достаточно подробно изучена в гл. 10). Но некоторые из его наблюдений сохраняют свой истинный смысл только для модели, включающей одновременно спрос и предложение. К их изучению мы теперь и перейдем; этот раздел будет во многом сходен с частью, посвященной функции потребления (см. гл. 4, § 3).

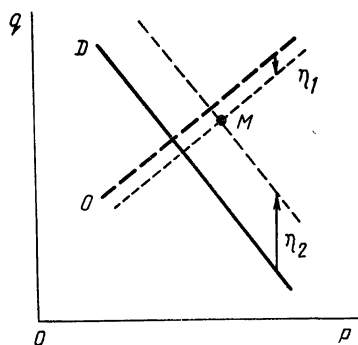


Рис. 4

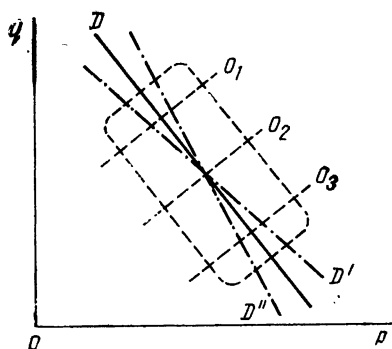


Рис. 5

Итак, вернемся к модели:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= b_1 p_t + c_1 \theta_t + f_1 + \eta_{1t}, \\ q_t &= b_2 p_t + f_2 + \eta_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

в которой два уравнения определяют соответственно предложение и спрос. Изобразим метод определения пары (p_t, q_t) для периода, в котором θ_t имеет заданное значение. Для этого на графике, где по оси абсцисс нанесены значения p , а по оси ординат — значения q , начертим функцию среднего предложения $q_t = b_1 p_t + c_1 \theta_t + f_1$ и функцию среднего спроса $q_t = b_2 p_t + f_2$ (линии O и D на рис. 4). При отсутствии неидентифицированных факторов количество q_t и цена p_t примут значения, определяемые точкой пересечения O и D . Но вследствие существования отклонений η_{1t} и η_{2t} наблюдаемые значения соответствуют точке пересечения двух линий, полученных соответственно из O и D путем сдвига по вертикали на величины η_{1t} и η_{2t} . Если бы θ_t принимало одно и то же значение для всех наблюдений, точки наблюдения распределялись бы вокруг точки пересечения O и D , причем положительное отклонение η_2 чаще всего соответствовало бы высоким значениям p и q , положительное отклонение η_1 — высокому значению q , но низкому значению p .

Такая же, хотя менее четко выраженная, тенденция сохраняется в выборке для периодов, в течение которых θ_t принимало различные значения.

На рис. 5 пунктирная линия служит для обозначения контура облака гипотетических точек. Высокие значения p чаще всего соответствуют положительным η_2 , низкие значения p — отрицательным η_2 .

Хотя облако вытянуто вдоль линии спроса D , определение регрессии q по p даст прямую D' с большим наклоном, чем D . Наоборот, регрессия p по q будет отражена прямой D'' с меньшим наклоном, чем D . Ни первая, ни вторая из этих двух регрессий не представляются удовлетворительными.

Для уточнения этих общих рассуждений необходимо более строго определить случайные характеристики модели (13). Величину θ_t естественно рассматривать как неслучайную экзогенную переменную по тем же причинам, что и в регрессионных моделях. Можно также допустить, что отклонения η_{1t} и η_{2t} , отражающие влияние неидентифицированных факторов, имеют не зависящее от t распределение и нулевое математическое ожидание при любых значениях θ_t . Но от априорного предположения о независимости η_{1t} и η_{2t} нужно отказаться, так как некоторые из неидентифицированных факторов могут влиять одновременно и на предложение, и на спрос. Итак, положим:

$$E(\eta_{1t}^2) = \sigma_1^2, \quad E(\eta_{2t}^2) = \sigma_2^2, \quad E(\eta_{1t} \eta_{2t}) = \rho \sigma_1 \sigma_2. \quad (18)$$

Для удобства изложения будем считать, что оценка $\frac{1}{b_2}$ получается из регрессии p по q . Читатель может рассмотреть сам, как преобразуются полученные ниже результаты при оценке b_2 из регрессии q по p . Формулы простой регрессии непосредственно дают значение оценки:

$$b_2^* = \frac{\sum_t (q_t - \bar{q})^2}{\sum_t (q_t - \bar{q})(p_t - \bar{p})}. \quad (19)$$

Для изучения свойств b_2^* предположим, что число наблюдений T неограниченно возрастает и что выражение $\frac{1}{T} \sum_t (\theta_t - \bar{\theta})^2$ стремится к числу S^2 .

В оценке b_2^* как p_t , так и q_t являются случайными величинами. Их выражения даны системой приведенных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= a_{11} \theta_t + a_{10} + \varepsilon_{1t}, \\ p_t &= a_{21} \theta_t + a_{20} + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где a_{ij} , ε_{1t} и ε_{2t} рассчитываются на основе коэффициентов системы (13), а η_{1t} и η_{2t} — как и в предыдущем параграфе. Гипотезы относительно η_{1t} и η_{2t} предполагают, что ε_{1t} и ε_{2t} имеют нулевые математические ожидания при любом значении θ_t и что распределение пары $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ не зависит от t . Отсюда справедливы следующие пределы по вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_t (q_t - \bar{q})^2 &\rightarrow a_{11}^2 S^2 + E(\varepsilon_{1t}^2), \\ \frac{1}{T} \sum_t (q_t - \bar{q})(p_t - \bar{p}) &\rightarrow a_{11} a_{21} S^2 + E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t}). \end{aligned}$$

Но $a_{11} = b_2 a_{21}$ и $\varepsilon_{1t} = b_2 \varepsilon_{2t} + \eta_{2t}$, следовательно,

$$a_{11}^2 S^2 + E(\varepsilon_{1t}^2) = b_2 [a_{11} a_{21} S^2 + E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t})] + E(\varepsilon_{1t} \eta_{2t}).$$

Таким образом, предел b_2^* задается в виде:

$$b_2^* \rightarrow b_2 + \frac{E(\varepsilon_{1t} \eta_{2t})}{a_{11} a_{21} S^2 + E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t})}. \quad (20)$$

Оценка b_2 через b_2^* в общем случае содержит *асимптотическое смещение*. Но оно будет незначительным, если $c_1^2 S^2$ велико по сравнению с σ_1^2 и σ_2^2 , т. е. если значения $c_1 \theta_t$ имеют гораздо большее рассеяние, чем значения отклонений η_{1t} и η_{2t} . В частном случае $E(\varepsilon_{1t} \times \eta_{2t}) = 0$, асимптотическое смещение равно нулю. Этот случай рассмотрим теперь более подробно.

В соответствии с определением ε_{1t} можно записать $(b_2 - b_1) E(\varepsilon_{1t} \eta_{2t}) = b_2 E(\eta_{1t} \eta_{2t}) - b_1 E(\eta_{2t}^2)$. Последняя величина равна нулю, если, в частности, $\rho = 0$ и $b_1 = 0$. Поэтому можно утверждать, что *регрессия цены по объему реализации представляет собой состоятельную оценку закона спроса, если предложение неэластично ($b_1 = 0$) и ошибки, относящиеся к предложению и спросу, не зависят друг от друга ($\rho = 0$)*.

Как ясно показано в [105], этот вывод оправдывает использование регрессии цены по объему для оценки спроса на различные пищевые продукты. Многие из этих продуктов не могут храниться, и предложение в этом случае практически равно производству. Но последнее часто медленно реагирует на изменения цен. Таким образом, можно считать, что эластичность предложения по текущим ценам весьма незначительна. К тому же неидентифицированные причины, воздействующие, с одной стороны, на поведение производителей, с другой стороны, на поведение потребителей, очевидно, должны иметь разный характер. Таким образом, в первом приближении можно также допустить отсутствие корреляции между η_{1t} и η_{2t} .

Исследуя рынок свинины в Соединенных Штатах, К. Фокс [105] произвел косвенную проверку этих положений. Он сравнил две оценки спроса. Первая из них была получена из множественной регрессии розничной цены по потреблению и по доходу домашних хозяйств (y), вторая — с помощью метода, приводящего к состоятельным оценкам. Он заключается в применении метода наименьших квадратов к системе приведенных уравнений¹ и будет рассмотрен ниже. Для прямой регрессии были получены следующие результаты:

$$p_t = -1,16 q_t + 0,90 y_t. \quad (21)$$

(0,07) (0,06)

С помощью косвенного метода было получено уравнение с состоятельными оценками:

$$p_t = -1,14 q_t + 0,90 y_t. \quad (22)$$

Как видно, оба результата практически идентичны.

¹ Переменные регрессии представляют собой первые разности логарифмов наблюдавшихся величин за 20 лет (1922—1941 гг.). Для более детального ознакомления см. [105, с. 66—76].

Не следует думать, что положение всегда таково. В других случаях результаты отличаются гораздо сильнее. Так, Г. Волд [330] сравнил разные оценки спроса на арбузы в Соединенных Штатах в 1930—1951 гг. Прямая регрессия цены по количеству дает уравнение:

$$p_t = -1,41 q_t + 1,61 y_t - 0,89 z_t - 1,69,$$

где z_t — индекс стоимости перевозки арбузов, а переменные представляют собой логарифмы наблюдавшихся величин. Косвенный метод дает следующее уравнение:

$$p_t = -1,11 q_t + 1,53 y_t - 0,68 z_t - 0,14,$$

коэффициенты которого значительно отличаются от предыдущих. В этом случае на предложение в определенном году сильное влияние должна оказывать средняя цена реализации в том же году.

Эти два примера показывают, что до оценки закона спроса следует изучить условия предложения. В некоторых благоприятных случаях предложение независимо от цены, и регрессия цены по объему потребления дает состоятельную оценку спроса. Но так дело обстоит не всегда.

Легко доказать с помощью вышеприведенного способа рассуждений, что регрессия объема потребления по ценам дает состоятельную оценку закона спроса, если предложение совершенно эластично и если ошибки, влияющие на спрос и предложение, не зависят друг от друга. В этом случае функция предложения, например, может иметь вид:

$$p_t = c_1 z_t + f_1 + \eta_{1t},$$

где z_t — экзогенная переменная, не зависящая ни от цены p_t , ни от объема q_t . Цена предложения в этом случае определяется независимо от значения, которое может принять потребление q_t .

Выравнивание количества по ценам хорошо подходит для изучения спроса на общественные услуги. Номинальная цена в этом случае обычно является фиксированной на достаточно длительный период и не реагирует на колебания спроса. Влияющая на решения потребителей реальная цена обычно измеряется отношением номинальной цены к индексу общего уровня цен¹, который также не зависит существенно от спроса на рассматриваемый вид общественных услуг. Равным образом воздействующие на определение этой реальной цены случайные факторы действительно отличаются от факторов, влияющих на спрос. Например, в трех работах французских исследователей относительно почтовой связи, торговли табачными изделиями и пассажирского железнодорожного транспорта использовались регрессии объема потребления по реальной цене (см. [222], [111], [36]).

Что следует делать, если предложение не является ни совершенно эластичным, ни совершенно неэластичным? Подробный ответ на этот вопрос будет дан в последующих главах. Но уже сейчас можно найти достаточно простое решение модели (13).

¹ Это отношение называется компаративной, или реальной, ценой. — *Прим. ред.*

Действительно, мы предположили, что ошибки структурных уравнений η_{1t} и η_{2t} имеют нулевые математические ожидания при любых значениях экзогенной переменной θ_t . Такое же свойство будет в этом случае характерно и для ошибок приведенных уравнений ε_{1t} и ε_{2t} . Кроме того, если пара (η_{1t}, η_{2t}) имеет не зависящее от t распределение, пара $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ также имеет одинаковое распределение для всех наблюдений.

В таком случае основные гипотезы метода наименьших квадратов справедливы и для системы приведенных уравнений. Используя простые регрессии для двух уравнений системы (14), получим состоятельные оценки a_{11} и a_{21} :

$$a_{11}^* = \frac{\sum_t (q_t - \bar{q})(\theta_t - \bar{\theta})}{\sum_t (\theta_t - \bar{\theta})^2}; \quad a_{21}^* = \frac{\sum_t (p_t - \bar{p})(\theta_t - \bar{\theta})}{\sum_t (\theta_t - \bar{\theta})^2}.$$

Поскольку $b_2 = \frac{a_{11}}{a_{21}}$, состоятельной оценкой этого коэффициента будет:

$$\tilde{b}_2 = \frac{a_{11}^*}{a_{21}^*} = \frac{\sum_t (q_t - \bar{q})(\theta_t - \bar{\theta})}{\sum_t (p_t - \bar{p})(\theta_t - \bar{\theta})}. \quad (23)$$

Будем считать, что эта оценка вытекает из *косвенной регрессии*.

Так, в своем исследовании рынка свинины К. Фокс [105] рассматривал следующие законы спроса и предложения:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= b_1 p_t + c_1 z_t + \eta_{1t}, \\ q_t &= b_2 p_t + c_2 y_t + \eta_{2t}, \end{aligned} \right\}$$

где y_t — доход домашних хозяйств, z_t — производство свинины. Две регрессии для приведенных уравнений дали следующие результаты:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= 0,84 z_t - 0,06 y_t, \\ p_t &= -0,96 z_t + 0,97 y_t. \end{aligned} \right\}$$

Вышеупомянутая оценка закона спроса (см. отношение (22)) была получена путем исключения z_t из этих двух уравнений.

Заметим также, что оценка \tilde{b}_2 рассчитывается на основе формулы, подобной формуле оценки спроса с θ_t в качестве *инструментальной переменной* (сравните, например, (23) с формулой (31) гл. 10). Эта аналогия не должна удивлять и будет объяснена в следующей главе.

4. Рекурсивные модели

Хотя цена и объем потребления являются результатом сопоставления предложения и спроса, мы обнаружили два случая, в которых прямая регрессия для спроса дает состоятельную оценку.

В первом случае предложение совершенно неэластично, и модель имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= c_1 \theta_t + f_1 + \eta_{1t}, \\ p_t &= \frac{1}{b_2} q_t + f_2' + \eta_{2t}', \end{aligned} \right\} \text{ где } E(\eta_{1t} \eta_{2t}') = 0 \quad (24)$$

(постоянная f_2' и ошибка η_{2t}' выводятся из f_2 и η_{2t} путем деления на b_2). Установленные на основании модели зависимости представляют собой *причинную цепь*, поскольку объем потребления определяется на основе экзогенной переменной θ_t и ошибки η_{1t} , тогда как цена выводится из объема потребления и ошибки η_{2t} . Это положение иллюстрирует следующая схема:

$$\begin{array}{ccccc} \theta_t & \rightarrow & q_t & \rightarrow & p_t \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \eta_{1t} & & \eta_{2t}' \end{array} \quad (24')$$

Равным образом во втором случае предложение является совершенно эластичным, и модель имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} p_t &= c_1' \theta_t + f_1' + \eta_{1t}', \\ q_t &= b_2 p_t + f_2 + \eta_{2t}, \end{aligned} \right\} \text{ где } E(\eta_{1t}' \eta_{2t}) = 0 \quad (25)$$

(постоянные c_1' , f_1' и ошибка η_{1t}' выводятся из c_1 , f_1 и η_{1t} путем деления на $-b_1$, так как коэффициент при q_t в функции предложения в этом случае равен 0). Установленные зависимости и в этом случае представляют причинную цепь. Она иллюстрируется схемой:

$$\begin{array}{ccccc} \theta_t & \rightarrow & p_t & \rightarrow & q_t \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \eta_{1t}' & & \eta_{2t} \end{array} \quad (25')$$

В первом случае q_t и η_{2t}' действуют как два независимых фактора, определяющих p_t , причем обратной связи от цены к объему потребления не существует. Регрессия цены по объему потребления является обоснованной.

Во втором случае p_t и η_{2t} представляют собой два фактора, не зависящих от потребления. Регрессия объема потребления по цене обоснована.

Модели типа (24) и (25) были названы Г. Волдом, который первым начал их изучать, «рекурсивными». В более общем случае пусть

$$Bx_t + Cz_t + \eta_t = 0 \quad (26)$$

будет структурной формой модели из системы уравнений. Модель называется *рекурсивной*, если существует такой порядок эндогенных переменных ($i = 1, 2, \dots, n$), что матрица B является треугольной, а ковариационная матрица η — диагональной, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= 0 & \text{для любого } j > i \\ E(\eta_{it} \eta_{jt}) &= 0 & \text{для любого } j \neq i. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В этом случае можно считать, что i -е структурное уравнение отражает причинное определение i -й эндогенной переменной на основе ошибки η_i и других входящих в это уравнение переменных. Не существует никакого отношения зависимости x_1, x_2, \dots, x_{i-1} от x_i . Множественная регрессия x_i по другим входящим в i -е структурное уравнение переменным дает состоятельную оценку этого уравнения.

Эти определение и свойство можно обобщить для моделей с запаздывающими эндогенными переменными. Рассмотрим, например, так называемую «паутинную» модель, которая часто предлагается для описания рынка некоторых продуктов сельскохозяйственного происхождения, в частности свинины. Предложение является функцией цены предшествующего года, тогда как спрос зависит от текущей цены. Действительно, решение об объеме производства должно быть принято заранее на основе цен, наблюдавшихся в течение кампании предыдущего года. Модель можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= d_1 p_{t-1} + f_1 + \eta_{1t}, \\ p_t &= \frac{1}{b} q_t + f'_2 + \eta'_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

а зависимости представить следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & p_{t-1} & \rightarrow & q_t & \rightarrow & p_t \rightarrow q_{t+1} \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \eta'_{2, t-1} & & \eta_{1t} & & \eta'_{2t} & & \eta_{1, t+1} \end{array} \quad (28')$$

Цепь в этом случае получается неопределенной, но это не влияет на рассматриваемые здесь проблемы оценки.

Однако, как показано в [244], модель представляет собой чистую причинную цепь лишь в том случае, если ошибки удовлетворяют достаточно строгим условиям. Для отсутствия корреляции между η'_{2t} и q_t необходимо, чтобы η_{2t} не коррелировало ни с η_{1t} , ни с $\eta_{2, t-1}$, $\eta_{1, t-1}$ и т. д. К системе (28) необходимо, таким образом, добавить условия:

$$\left. \begin{aligned} E(\eta'_{2t} \eta_{1, t-\tau}) &= 0 & \text{для любого } \tau \geq 0 \\ E(\eta'_{2t} \eta'_{2, t-\tau}) &= 0 & \text{для любого } \tau > 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Следовательно, относящиеся к различным годам ошибки η'_{2t} не должны быть ни автокоррелированными, ни коррелированными с предыдущими или совпадающими значениями η_{1t} .

Это условие не должно вызывать удивления, поскольку систему (28) можно рассматривать как авторегрессионную модель для вектора из двух компонент (q_t, p_t) . Но как мы видели, условием состоятельности оценки авторегрессионной модели по методу наименьших квадратов является отсутствие автокорреляции ошибок. В случае автокорреляции ошибки будут также коррелировать с предопределенными переменными, по которым рассчитываются регрессии.

Рассмотрим в более общем виде модель с запаздывающими эндогенными переменными:

$$Bx_t + Cz_t + D_1 x_{t-1} + \dots + D_h x_{t-h} + \eta_t = 0, \quad (30)$$

различные уравнения которой представляют собой структурные отношения. Модель будет считаться рекурсивной, если ошибки не являются ни коррелированными между собой, ни автокоррелированными и если существует такой порядок эндогенных переменных ($i = 1, 2, \dots, n$), что матрица B является треугольной, т. е.

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} &= 0 \text{ для любого } j > i \\ E(\eta_{it} \eta_{j, t-\tau}) &= 0 \text{ для любого } i, j \text{ и любого } \tau > 0 \\ E(\eta_{it} \eta_{jt}) &= 0 \text{ для любого } j \neq i \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В рекурсивной модели множественная регрессия x_i по остальным входящим в i -е структурное уравнение переменным дает состоятельную оценку этого уравнения.

Рекурсивные модели представляют для эконометриста определенное удобство, поскольку их можно оценить с помощью простых методов, причем каждое уравнение рассматривается независимо от других. При анализе явлений, которые априори связаны с действием нескольких законов, всегда следует выяснить, не является ли рекурсивное описание достаточным для приближенного отражения реальных зависимостей. Выбор слишком общей модели предполагает, что ее нужно оценить с помощью сложных методов и — что еще более серьезно — что мы не сможем достичь большой точности в результатах. Искусство эконометриста заключается в том, чтобы найти такой набор одновременно достаточно специфических и достаточно реальных гипотез, который позволит ему извлечь наибольшую пользу из имеющихся у него данных.

Но, как кажется, трудно утверждать, что любая модель должна быть рекурсивной, как это делал на протяжении определенного времени Г. Волд. Этот вопрос уже был выяснен в гл. 2, § 6, и не будем больше возвращаться к нему. Следует все-таки отметить, что, имея дело с неслучайными моделями, мы не использовали гипотезы независимости ошибок, воздействующих на различные уравнения. Эта гипотеза еще более ограничивает область применения рекурсивных моделей, так как часто можно опасаться, что одни и те же неидентифицированные факторы влияют на различные типы поведения, отражаемые структурными уравнениями¹.

¹ Г. Волд доказал, что для любой системы уравнений можно найти эквивалентную рекурсивную систему (см. [326, § 12.7]). Например, для любой системы формы (26) существует одна или множество квадратных матриц P , таких, что

$$PBx_t + PCz_t + P\eta_t = 0$$

будет рекурсивной моделью. Этот же вывод можно применить к моделям формы (30). На основе этого свойства можно было бы сказать, что любая модель представима в трех предпочтительных формах: структурной форме, приведенной форме и рекурсивной форме (или формах). Но уравнения определенной таким образом рекурсивной формы в общем случае не имеют той же автономии, что и структурные уравнения; на все эти уравнения может повлиять структурное преобразование, касающееся лишь одного закона поведения. Поэтому неясно, почему рекурсивную форму следует предпочитать любой другой форме, в которую может быть преобразована модель, и, в частности, приведенной форме.

5. Структурные уравнения и теоретические регрессии

Для обоснования модели простой регрессии

$$x_t = az_t + b + \varepsilon_t$$

часто утверждают, что ожидание x_t , связанное с z_t , задается линейным выражением $az_t + b$. Другими словами, $x = az + b$ будет теоретической регрессией x по z . Этот метод обоснования модели приемлем в том случае, если z можно считать случайной переменной (см. гл. 3, § 8). Он хорошо приспособлен для прогнозов на основе модели, так как

$$x^P = az + b = E(x/z)$$

в определенном смысле представляет собой наилучший прогноз, который можно получить для x при заданном значении z (см. гл. 2, § 15 и гл. 3, § 9).

Г. Волд [329], [330] утверждал, что эту же точку зрения можно применить к различным структурным уравнениям модели из системы уравнений. Каждое структурное уравнение должно отражать отдельный закон поведения, который приводит к определению значения специфической переменной. Согласно Г. Волду это уравнение можно интерпретировать как теоретическую регрессию этой переменной по другим переменным.

Таким образом, предположим, что поведение потребителей определяет цену, по которой найдет сбыт некоторое количество продукции. Функция спроса

$$p_t = \frac{1}{b_2} q_t + f'_2 + \eta'_{2t}$$

будет определять теоретическую регрессию p по q , т. е.

$$E(p/q_t) = \frac{1}{b_2} q_t + f'_2. \quad (32)$$

Она позволит получить наилучший возможный прогноз p , если q и коэффициенты модели точно известны.

Если принять эту точку зрения, тогда каждое структурное уравнение можно оценить отдельно по методу наименьших квадратов на основе регрессии, объясняющей одну переменную по другим переменным. Такая оценка будет состоятельна (см. [329] и гл. 3, § 8 данной работы).

Например, регрессия цены по объему потребления дает состоятельную оценку b_2^* , если теоретическая регрессия действительно определяется формулой (32). Полученная выше формула (20) показывает, что асимптотическое смещение b_2^* исчезает, если ε_1 и η_2 не коррелируют друг с другом. Но отношение (32) предполагает, что η_2 не коррелирует с q , а следовательно, не коррелирует и с ε_1 (первое приведенное уравнение (14) показывает, что ε_1 отличается от q на неслучайную величину).

Таким образом, эта точка зрения приводит к заключению, совершенно противоположному приведенному выше. Мы должны точно по-

нять, в чем оно отличается от заключения, полученного в этой главе, и которого мы будем придерживаться в дальнейшем. Можно напомнить, что мы уже сталкивались с этим вопросом и обсуждали его в связи с исследованием простой кейнсианской модели (см. гл. 4, § 3). Теперь вернемся к обсуждению этого же вопроса на несколько более высоком уровне.

Заметим прежде всего, что интерпретация структурных уравнений как теоретических регрессий не ставит никаких проблем при исследовании рекурсивных моделей. Например, модель:

$$\left. \begin{aligned} q_t &= c_1 \theta_t + f_1 + \eta_{1t} \\ p_t &= \frac{1}{b_2} q_t + f'_2 + \eta'_{2t} \end{aligned} \right\} \text{ при } E(\eta_{1t} \eta'_{2t}) = 0 \quad (24)$$

предполагает:

$$\left. \begin{aligned} E(q_t/\theta_t) &= c_1 \theta_t + f_1, \\ E(p_t/q_t) &= E(p_t/q_t, \theta_t) = \frac{1}{b_2} q_t + f'_2, \end{aligned} \right\}$$

если η_{1t} и η_{2t} имеют нулевые математические ожидания при любом значении θ_t . В этом случае принятые здесь гипотезы и гипотезы, предложенные Г. Волдом, будут эквивалентны. Но в менее частных моделях дело обстоит иначе.

Во-первых, в общем случае нельзя обоснованно указать для каждого структурного уравнения переменную, значение которой будет определяться законом поведения, описываемым данным уравнением. Например, модель предложения и спроса предполагает одновременное определение объема потребления и цены. За исключением частных случаев, к которым относится модель (24), нельзя обоснованно решить, какая из двух величин определяется предложением и какая — спросом. Этот вопрос уже исследовался в гл. 2, § 6.

Во-вторых, в нерекурсивных моделях теоретические регрессии имеют различный смысл в зависимости от того, являются экзогенные переменные случайными или нет. Действительно, допустим, что предложение считается определяющим объемом потребления, а спрос — цены, хотя это и представляется совершенно искусственным. Г. Волд предполагает считать, что спрос определяет математическое ожидание p_t , связанного с q_t ,

$$E(p_t/q_t) = \frac{1}{b_2} q_t + f'_2. \quad (32)$$

Если экзогенная переменная θ_t не является случайной, тогда это отношение представляет собой гипотезу, которую немногие согласятся допустить: она заключается в утверждении, что $E(p_t/q_t)$ не зависит от θ_t , т. е., что цена реализации данного урожая не зависит в среднем от метеорологических условий года. Действительно, если эти условия неблагоприятны, урожай может достичь данного объема лишь в результате благоприятного влияния других факторов, воздействующих на предложение (η_{1t}) и спрос (η_{2t}), и что цена в этом случае будет

более высокой, чем при хороших метеорологических условиях. Положение будет иным, только если $E(\eta_{2t}^2 \varepsilon_{1t})$ равно нулю, следовательно; если между η_{1t} и η_{2t} существует отрицательная корреляция с коэффициентом $\rho = b_1 \sigma_2 / b_2 \sigma_1$ (коэффициент b_2 , естественно, отрицателен).

Если экзогенная переменная θ_t считается случайной, получаемой путем независимых выборок с одним и тем же законом распределения вероятностей, отношение (32) можно считать определяющим коэффициенты b_2 и f_2' . Оно определяет среднее значение p_t при известном значении q_t и неизвестном значении θ_t . Но использовать это отношение в качестве базы прогнозов — значит отступить от выражаемой моделью теории. Действительно, эта теория предполагает, что экзогенная переменная θ_t должна служить предметом независимого прогноза. Между тем прогнозы объема потребления и цены необходимо получить совместно, в результате одновременного изучения предложения и спроса.

Модель, очевидно, можно выразить с помощью теоретических регрессий. Но это будут регрессии, определяющие математическое ожидание каждой эндогенной переменной в зависимости от заданных значений экзогенных переменных. Эти регрессии соответствуют системе приведенных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} E(q_t / \theta_t) &= a_{11} \theta_t + a_{10}, \\ E(p_t / \theta_t) &= a_{21} \theta_t + a_{20}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, система приведенных уравнений представляет собой форму модели, которую можно наиболее непосредственно использовать для получения прогнозов.

6. Оценка производственных функций

В предыдущих параграфах в качестве примера использовалось выравнивание законов спроса. Очевидно, существует много других областей, в которых оценка структурного отношения требует изучения моделей из системы уравнений. Прежде чем закончить эту главу, мы слегка коснемся двух проблем, сыгравших большую роль в эконометрической литературе: оценки производственных функций на основе данных относительно совокупности предприятий и определения эластичности по ценам в международной торговле.

Производственная функция предприятия отражает характерные для него технологические ограничения. Она определяет объемы продуктов, которые могут быть получены на основе любой возможной комбинации производственных факторов. В целях простоты изложения ограничимся случаем выпуска только одного вида продукта (его объем обозначим через Q), и наличия двух производственных факторов (их объемы обозначим соответственно через N и K). В многочисленных работах N обозначает труд, K — капитал. В этом случае производственную функцию можно записать:

$$Q = f(N, K).$$

На практике относительно формы этой функции обычно принимают более или менее строгие гипотезы. Будем предполагать, что речь идет о функции Кобба—Дугласа, имеющей вид:

$$Q = AN^{\alpha}K^{\beta}, \quad (33)$$

где A , α и β — неизвестные постоянные коэффициенты. Известно, что этот тип функции в весьма многочисленных случаях представляется приемлемым в качестве первого приближения. Он сводится к линейному отношению между логарифмами q , n и k исходных величин Q , N и K , т. е.

$$q = \alpha n + \beta k + \gamma, \quad (34)$$

где $\gamma = \lg A$.

Часто допускается, что предприятия одной и той же отрасли промышленности подчиняются сходным техническим ограничениям и, следовательно, имеют приблизительно одну и ту же производственную функцию. Поэтому незадолго перед второй мировой войной получила широкое распространение идея оценки входящих в среднюю функцию отрасли параметров α , β и γ с помощью данных (q_i, n_i, k_i) , наблюдаемых для выборки предприятий отрасли в течение определенного периода ($i = 1, 2, \dots, T$). Точнее, эти параметры сначала определялись как коэффициенты множественной регрессии q по n и k . Обоснованность этого сразу вызвала сомнения, на которых мы теперь и остановимся. (Полный список первых работ в области производственных функций и порожденных ими дискуссий можно найти в работе [216].)

Поскольку предприятия не имеют все в точности одну и ту же производственную функцию, будет естественно записать функцию предприятия i в форме:

$$q_i = \alpha n_i + \beta k_i + \gamma + \eta_{1i}, \quad (35)$$

где η_{1i} можно рассматривать как случайную переменную с нулевым математическим ожиданием. Последнее связано с тем, что ничего не известно об эффектах различий между ограничениями, влияющими на данное предприятие, и ограничениями, воздействующими на другие предприятия той же отрасли.

Отношение (35) априори представляется достаточным обоснованием регрессии q_i по n_i и k_i . Но более внимательное исследование показывает, что в конкретных ситуациях n_i и k_i нельзя считать экзогенными величинами. Объемы факторов могут быть действительно экзогенными величинами, если бы данные о них являлись результатом настоящего эксперимента (например, если бы предприятию i предлагалось использовать выбранные произвольным образом объемы N_i и K_i и отмечалось, какой объем продукции Q_i оно получило¹). Но на практике предприятие само, в своих интересах, определяет N_i и K_i и в то же время фиксирует объем продукции Q_i , который оно желало бы получить. Итак,

¹ Разумеется, там, где оно возможно, экспериментальное определение производственных функций может дать приемлемые оценки. Так, многочисленные опыты позволили получить функции для различных сельскохозяйственных производств см. [143].

необходимо более подробно выяснить, каким образом определяются совместно N_i , K_i и Q_i .

Изучаемые предприятия в зависимости от рассматриваемого случая могут находиться в весьма различных условиях. Модели для описания этих условий также будут изменяться в зависимости от конкретного случая. Очевидно, не может быть и речи о том, чтобы рассмотреть здесь все возможные случаи. Ограничимся лишь двумя примерами.

Предположим сначала, что данная отрасль состоит из частных предприятий и что рынок выпускаемого продукта, как и рынки факторов, могут считаться конкурентными. В этом случае существуют цена на выпускаемый продукт p и цены s и r на оба фактора N и K . Для максимизации своей прибыли предприятие i должно выбрать N_i , K_i и Q_i так, чтобы предельные производительности двух факторов были строго равны s/p и r/p . Учитывая производственную функцию (35), получаем:

$$\begin{aligned}(q_i - n_i) + \lg \alpha &= \lg \frac{s}{p}, \\ (q_i - k_i) + \lg \beta &= \lg \frac{r}{p}.\end{aligned}$$

Поскольку управление предприятием не является совершенным, следует ожидать некоторых отклонений предельных производительностей в ту или иную сторону от относительных цен. Поэтому запишем:

$$\left. \begin{aligned}q_i - n_i &= \lg \frac{s}{\alpha p} + \eta_{2i}, \\ q_i - k_i &= \lg \frac{r}{\beta p} + \eta_{3i},\end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где η_{2i} и η_{3i} — случайные аддитивные члены с нулевым математическим ожиданием.

При таком положении три величины q_i , n_i и k_i действительно определяются из уравнений (35) и (36). Если бы все предприятия имели совершенное управление и вполне одинаковую производственную функцию, эти три величины принимали бы одинаковые значения для всех предприятий¹. Выборка в этом случае не позволила бы рассчитать регрессию q_i по n_i и k_i .

Существование аддитивных членов η_{1i} , η_{2i} и η_{3i} объясняет, почему наблюдаемые результаты имеют некоторое рассеяние. Но регрессия q_i по n_i и k_i никоим образом не соответствует производственной функции (35). Действительно, в результате решения структурных уравнений (35) и (36) получим следующую систему приведенных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}q_i &= q_0 + \varepsilon_{1i}, \\ n_i &= n_0 + \varepsilon_{2i}, \\ k_i &= k_0 + \varepsilon_{3i},\end{aligned} \right\} \quad (37)$$

¹ При более полном изучении вопроса следует обратить большее внимание на возможность получения множества решений.

где постоянные q_0 , n_0 , k_0 и случайные члены ε_{1i} , ε_{2i} , ε_{3i} являются выражениями α , β постоянных γ , $\lg s/p$, $\lg r/p$ и членов η_{1i} , η_{2i} , η_{3i} . Два коэффициента регрессии q_i по n_i и k_i зависят от корреляции между ε , которые являются функциями одновременно α , β и корреляции между η .

Таким образом, найденная регрессия не будет удовлетворительной оценкой производственной функции. Она представляет собой совершенно искусственное отношение, которое зависит от корреляции между ошибками η_{1i} , η_{2i} , η_{3i} , а также от α и β .

Нет смысла далее задерживаться на этом вопросе, тем более, что реальное описание потребовало бы введения не полностью конкурентных рынков. Читатель, желающий более глубоко познакомиться с этим вопросом, может обратиться к работам [216], [313], [233]. Он найдет в них, в частности, различные предложения относительно оценки производственных функций в отраслях с полностью конкурентными рынками.

Предположим теперь, что мы имеем дело с отраслью общественных услуг и что различные предприятия обязаны удовлетворять спрос по внешним образом фиксированной цене. Выпуск продукции Q_i является экзогенной величиной. В качестве реванша предприятие выбирает уровни двух используемых факторов, чтобы свести к минимуму свои издержки. Допустим, что предприятия расположены в различных районах и что цены факторов s_i и r_i могут изменяться от одного предприятия к другому.

Если производственная функция задана отношением (35), минимизация издержек предприятия i предполагает:

$$\frac{s_i N_i}{\alpha} = \frac{r_i K_i}{\beta},$$

что можно также записать в виде:

$$n_i - k_i = \lg \frac{\alpha r_i}{\beta s_i}. \quad (38)$$

Структурные соотношения (35) и (38) позволяют определить эндогенные переменные n_i и k_i на основе экзогенных переменных q_i , r_i и s_i . По уже обсуждавшимся в этой главе причинам регрессия q_i по n_i и k_i не дает состоятельной оценки первого структурного соотношения.

М. Нерлов [231] разработал метод оценки, соответствующий этому случаю. Вместо использования системы приведенных уравнений для определения n_i и k_i через q_i , r_i и s_i он выразил издержки предприятия i , C_i как функции тех же экзогенных переменных. Из соотношений (35) и (38) и определения

$$C_i = s_i N_i + r_i K_i,$$

он вывел:

$$\lg C_i = \frac{1}{\alpha + \beta} q_i + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \lg s_i + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \lg r_i + \lambda + \varepsilon_i, \quad (39)$$

где λ — постоянная, зависящая от α , β и γ , а ε_i — случайная переменная, равная

$$-\frac{1}{\alpha + \beta} \eta_{1i},$$

(преобразования, в результате которых было получено выражение (39), элементарны, хотя и несколько трудоемки). Соотношение (39) позволяет выразить новую эндогенную переменную C_i как линейную функцию одних только экзогенных переменных. Ее оценку можно получить с помощью метода, изложенного в гл. 9. Действительно, можно заметить, что коэффициенты при трех экзогенных переменных зависят только от двух параметров. (Если бы цена одного из факторов, например r_i , была одинаковой для всех предприятий, было бы достаточно регрессии $\lg C_i$ по q_i и $\lg s_i$.)

Обобщая, можно сказать, что оценка производственных функций на основе данных, относящихся к предприятиям одной отрасли, требует учета совокупности отношений, объясняющих уровни затрат и выпусков. В этом случае производственная функция чаще всего будет выражаться моделью из системы уравнений, а форма этой модели будет изменяться в зависимости от ситуации¹.

7. Эластичность по ценам в международной торговле²

Повышение внутренних цен на импортируемые продукты вызывает сокращение объема импорта. Это явление может характеризовать коэффициент эластичности a_1 , равный отношению относительного изменения объема импорта к вызвавшему это изменение относительному изменению цен. Для статистического определения значения этого коэффициента обычно используется следующее соотношение:

$$x_{1t} = a_0 + a_1 p_{1t} + a_2 z_{1t} + \eta_{1t}, \quad (40)$$

согласно которому логарифм объема импорта в году t ; x_{1t} является линейной функцией логарифма индекса относительных цен на импортные продукты (p_{1t}), логарифма реального конечного продукта (z_{1t}) и различных прочих факторов, влияние которых выражается случайной переменной с нулевым математическим ожиданием (η_{1t}). (Можно сразу же заметить, что это отношение плохо подходит для стран, применяющих количественные ограничения импорта.)

Аналогично коэффициент эластичности b_1 отражает отношение относительного изменения объема экспорта к относительному изменению внешних цен на экспортируемые продукты. Для оценки b_1 используется следующее соотношение:

$$x_{2t} = b_0 + b_1 p_{2t} + b_2 z_{2t} + \eta_{2t}, \quad (41)$$

¹ Как показал И. Хох [146], модель из системы уравнений не является необходимой в общем случае, если данные относятся к выборке предприятий; наблюдаемых за ряд периодов.

² Более детально эти проблемы рассмотрены, например, в работе Н. L i n n e m a n n. An Econometric Study of International Trade Flows, Amsterdam, North — Holland Publ. 10, 1967.— Прим. ред.

согласно которому логарифм объема экспорта в году t , x_{2t} , является линейной функцией логарифма индекса относительных цен на национальные продукты на внешних рынках (p_{2t}), логарифма реального мирового конечного продукта (z_{2t}) и других, неидентифицированных факторов, представленных в целом случайным переменной (η_{2t}).

По отношению (40) и (41) с помощью метода наименьших квадратов были произведены выравнивания данных, относившихся к различным странам и периоду между двумя мировыми войнами¹. Результаты оказались удивительными. Действительно, полученные для a_1 и b_1 значения были невелики по абсолютной величине — порядка 0,50. Согласно этим результатам снижение цен на экспорт на 1% должно сопровождаться увеличением объема экспорта только приблизительно на 0,5% и, следовательно, должно привести к уменьшению стоимости экспорта, выраженной в международных платежных средствах.

Столь низкие значения коэффициентов эластичности по ценам предполагают последствия изменения цен, совершенно противоположные по сравнению с теми, которых ожидают классические экономисты и подавляющее большинство экспертов; определяющих внешнюю экономическую политику государств. Общепринято считать, что девальвация, с помощью которой удалось на длительное время снизить цены на национальные продукты на внешних рынках, является весьма сильным стимулом для экспорта.

Значения эластичностей для импорта или экспорта в целом кажутся также сомнительными, если их сравнить с эластичностями по ценам для более специфических групп продуктов. Например, Д. Макдугал [201] получил эластичность замены между американским и английским экспортом на третьих рынках приблизительно равную 3.

Эти рассуждения приводят к выводу, что метод, принятый для эмпирического определения a_1 и b_1 , является, несомненно, неадекватным. Следует критически рассмотреть модель и принятый метод оценки.

Прежде всего можно отметить, что модель основывается на предположении о быстром приспособлении к изменениям цен и доходов, поскольку экспорт и импорт за определенный год рассматриваются как функции цен и доходов только этого же года. В действительности торговые потоки между странами являются результатом контрактов, заключенных не на один день, которые, кроме того, предполагают существование медленно создающихся привычек и организации торговли. Таким образом, точное описание отношений спроса требует введения моделей с распределенными запаздываниями. Оценки по уравнениям (40) и (41), возможно, улавливают лишь краткосрочные реакции.

Но даже игнорируя этот, не относящийся непосредственно к настоящей главе факт, естественно задать вопрос, может ли множественная регрессия x_1 по p_1 и z_1 служить для оценки уравнения (40), а мно-

¹ Этим вопросом занимались различные авторы; использованные ими уравнения выравнивания несколько отличаются друг от друга см. [45], [46]. Достаточно полная библиография дана в [203], [240]. (См. примечание 2 на предыдущей странице.— *Прим. ред.*)

жественная регрессия x_2 по p_2 и z_2 — для оценки уравнения (41). Этот вопрос имеет большое практическое значение, так как наибольшая часть вариации x_1 действительно объясняется вариацией z_1 , а наибольшая часть вариации x_2 — вариацией z_2 и, таким образом, найденные для a_1 и b_1 значения сильно меняются в зависимости от принятого метода оценки.

Рассмотрим уравнение (40). В качестве первого приближения допустимо считать, что реальный конечный продукт определяется экзогенно, независимо от объема импорта и его цены, хотя и эта гипотеза плохо подходит для периодов неполной занятости. Что можно сказать об индексе цен на импортируемые продукты? Этот индекс зависит от цен на международных рынках, которые можно считать экзогенными, во всяком случае, если изучаемая страна не занимает на этих рынках слишком большого места. Но этот индекс зависит также от действительного валютного курса, т. е. от валютного паритета, умноженного на отношение нормы таможенного обложения к общему уровню цен в стране.

Равным образом в уравнении (41) реальный мировой конечный продукт можно считать экзогенным. Но индекс внешних цен на национальные продукты зависит от валютного курса, а также от объема экспорта в той степени, в которой национальное предложение экспортируемых продуктов не является совершенно эластичным по отношению к внутренним ценам.

Таким образом, две переменные p_1 и p_2 зависят от реального валютного курса. Этот курс весьма трудно считать экзогенным по отношению к объему импорта и экспорта в период между двумя войнами. Действительно, большинство стран неоднократно пересматривало валютные курсы с целью уравновесить свою внешнюю торговлю.

Таким образом, ни p_1 , ни, тем более, p_2 в действительности не определялись независимо от x_1 и x_2 . Обе они зависят от валютного курса, который изменялся всякий раз, когда пассивное торговое сальдо достигало тревожных размеров. Индекс p_2 , кроме того, через размеры национального предложения зависит от экспорта x_2 по крайней мере в том случае, если оно не является совершенно эластичным. Таким образом, использовавшиеся множественные регрессии могут содержать значительные смещения. К сожалению, не предпринималось попыток узнать, какого порядка может быть величина этого смещения.

ГЛАВА 17. ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ В СВЕТЕ ОТДЕЛЬНЫХ ПРИМЕРОВ

Оценка моделей из систем уравнений связана с весьма многочисленными проблемами, которые следует рассмотреть последовательно. Не приступая непосредственно к их систематическому общему решению, начнем с изучения отдельных примеров. Этот способ ознакомления не приведет к частым и существенным повторениям в этой и двух последующих главах. Он, несомненно, будет способствовать лучшему пониманию затрагиваемых проблем.

1. Косвенные регрессии

Сначала рассмотрим модель из системы уравнений, которая уже использовалась при изучении функции потребления (гл. 4) для отражения в общем виде кейнсианской теории равновесия в условиях неполной занятости. Эта модель, несомненно, одна из самых простых. Она имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \alpha x_{2t} + \beta + \eta_t \\ x_{2t} &= x_{1t} + z_t \end{aligned} \right\} \text{ при } E(\eta_t/z_t) = 0, \quad (1)$$

где эндогенные переменные x_1 и x_2 — соответственно потребление и доход, а экзогенная переменная z — капиталовложения. Модель содержит два структурных параметра, α и β , и случайное отклонение η с нулевым математическим ожиданием при любом значении z . Обоснование этой модели было дано в гл. 4.

На основе системы (1), которая представляет собой структурную форму модели, можно без труда определить приведенную форму:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= (a-1)z_t + b + \varepsilon_t, \\ x_{2t} &= az_t + b + \varepsilon_t, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$a = \frac{1}{1-\alpha}; \quad b = \frac{\beta}{1-\alpha}; \quad \varepsilon_t = \frac{\eta_t}{1-\alpha}. \quad (3)$$

Так же как и η_t , ε_t имеет нулевое математическое ожидание при любом значении z_t . Отсюда следует, что несмещенные оценки a и b можно получить из простой регрессии x_2 по z (см. второе приведенное уравнение). Обозначим найденные таким образом оценки через a^* и b^* . Их свойства хорошо известны.

Если все η_t имеют одинаковую дисперсию и не коррелируют между собой, то же самое можно сказать и о ε_t . Среди всех линейных оценок a^* и b^* имеют наименьшие дисперсии. Мы знаем, как найти эти дисперсии. Если принять не очень строгую гипотезу относительно последовательности z_t и неограниченном возрастании числа наблюдений, то a^* и b^* будут сходиться к истинным значениям a и b . Если, кроме того, η_t нормально распределено, то a^* и b^* также имеют нормальное распределение и являются эффективными оценками.

Так как модель часто используется в приведенной форме, можно было бы на этом остановиться и удовлетвориться оценкой системы (2). Однако желательно иметь также и оценку структурной формы (1): С одной стороны, α и β имеют более определенный смысл в экономических теориях. С другой стороны, модификации модели, необходимые для некоторых приложений, удобно вносить непосредственно в структурную форму.

Поскольку имеются удовлетворительные оценки a и b , естественно будет использовать их для оценивания α и β (см. формулы (3)), т. е. оценить структурные параметры из формул:

$$\alpha^* = 1 - (1/a^*) \text{ и } \beta^* = b^*/a^*, \quad (4)$$

так как (3) предполагает:

$$\alpha = 1 - (1/a) \text{ и } \beta = b/a. \quad (5)$$

Обобщая, можно сказать, что всякий раз, когда между структурными параметрами и коэффициентами приведенной формы имеется однозначная взаимная зависимость, эти коэффициенты можно оценить на основе множественных регрессий и затем использовать найденные зависимости, чтобы вывести из них оценки структурных параметров. В подобных случаях мы будем говорить о *косвенных регрессиях*.

Каковы статистические свойства оценок α^* и β^* ? Именно этот вопрос рассмотрим теперь для выяснения на данном примере некоторых общих характерных черт косвенных регрессий. Обратимся сначала к их асимптотическим свойствам.

В силу теоремы 3 гл. 6 пара $\sqrt{T}(a^* - a)$, $\sqrt{T}(b^* - b)$ имеет асимптотически нормальное распределение, если η_t не коррелируют между собой, имеют все одинаковую дисперсию, и если величина $\frac{1}{T} \sum_t (z_t - \bar{z})^2$ стремится к положительному пределу. Отсюда следует, что пара

$$\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha), \quad \sqrt{T}(\beta^* - \beta)$$

при тех же условиях имеет асимптотически нормальное распределение, характеристики которого можно полностью определить. Рассмотрим, например,

$$\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha).$$

Отношение (4) предполагает:

$$\alpha^* - \alpha = \frac{a^* - a}{a^* a}.$$

Следовательно¹, $\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha)$ имеет то же предельное распределение, что и

$$\frac{\sqrt{T}}{a^2} (a^* - a).$$

В частности, асимптотическое среднеквадратическое отклонение $\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha)$ может быть выведено из асимптотического среднеквадратического отклонения $\sqrt{T}(a^* - a)$ путем деления на a^2 .

Зависимость между предельным распределением коэффициентов регрессии приведенной формы и предельным распределением оценок структурных параметров можно выявить простым способом. Дифференцирование уравнений (5) дает:

$$d\alpha = \frac{1}{a^2} da; \quad d\beta = \frac{1}{a} db - \frac{b}{a^2} da. \quad (6)$$

По аналогии отсюда делаем вывод, что $\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha)$ и $\sqrt{T}(\beta^* - \beta)$ имеют такое же предельное распределение, что и

$$\frac{\sqrt{T}}{a^2} (a^* - a) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{T}}{a} (b^* - b) - \frac{b}{a^2} \sqrt{T} (a^* - a).$$

Разумеется, приведенные выше рассуждения необходимы, чтобы сделать этот метод строгим.

Существование предельных распределений $\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha)$ и $\sqrt{T}(\beta^* - \beta)$ предполагает, в частности, сходимость оценок α^* и β^* к истинным значениям α и β . Если η_t нормально распределено, эти оценки являются к тому же асимптотически эффективными, поскольку в этом случае они идентичны оценкам наибольшего правдоподобия. Действительно, выражение плотности вероятностей выборки можно записать либо с параметрами a и b , либо с параметрами α и β . По-

¹ Действительно, используя предложения 4 и 6 из приложения к гл. 9, можно без труда доказать следующее.

Предложение. Если случайная переменная x_T стремится по вероятности к числу ξ и если случайная переменная u_T имеет предельное распределение, то $u_T x_T$ имеет то же предельное распределение, что и $u \xi$. Это предложение применимо здесь поскольку $\frac{1}{a^*}$ стремится по вероятности к $\frac{1}{a}$. (Спецификация модели и первое равенство (3) предполагают, что a не равно нулю.)

сколько значения a^* и b^* максимизируют эту плотность при ее записи в первой форме, то значения α^* и β^* максимизируют ее, если она записана и во второй форме.

Поскольку (α^*, β^*) является совершенно определенной функцией (a^*, b^*) , между распределениями (a^*, b^*) и (α^*, β^*) существует также зависимость и для малых выборок. Чтобы изучить свойства оценок для малых выборок, рассмотрим a^* и α^* .

Если η_i нормально распределены, не коррелируют друг с другом и гомоскедастичны, a^* имеет нормальное распределение со средней, равной a , и среднеквадратическим отклонением σ_a . Его плотность, таким образом, равна:

$$f(a^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_a} \exp \left\{ -\frac{(a^* - a)^2}{2\sigma_a^2} \right\}.$$

В силу определяющей α^* формулы (4), плотность распределения α^* равна:

$$g(\alpha^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_a} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha^*)^2} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma_a^2} \left[\frac{1}{(1 - \alpha^*)} - \frac{1}{(1 - \alpha)} \right]^2 \right\}.$$

Она характеризует асимметричное распределение не совсем обычного типа (распределение обратного от переменной, имеющей нормальное распределение с ненулевой средней). В частности, математическое ожидание α^* определяется расходящимся интегралом; оценка α^* является смещенной.

Для вывода вероятностных заключений относительно α можно, разумеется, прибегнуть к посредству a . Например, если σ_a^* является обычной оценкой σ_a , то доверительный интервал для a при уровне значимости π задается:

$$a^* - t_\pi \sigma_a^* \leq a \leq a^* + t_\pi \sigma_a^*,$$

где t_π — переменная Стьюдента при уровне значимости π и $T - 2$ степенях свободы. Отсюда легко можно вывести доверительный интервал для α при том же уровне значимости:

$$\frac{1}{1 - \alpha^*} - t_\pi \sigma_a^* \leq \frac{1}{1 - \alpha} \leq \frac{1}{1 - \alpha^*} + t_\pi \sigma_a^*.$$

Но здесь рассматривается чрезвычайно благоприятный случай, когда структурный параметр является функцией лишь одного из коэффициентов приведенной формы. В общем случае каждый структурный параметр будет зависеть от нескольких коэффициентов так же, как в нашем случае β зависит от a и b . Таким образом, для вывода строгого вероятностного заключения относительно этого структурного параметра необходимо обратиться к распределению совокупности коэффициентов приведенной формы, в этом случае расчеты становятся очень трудоемкими.

Поэтому на практике удовлетворяются асимптотическим приближением. Распределение α^* , например, приравнивают к распределе-

нию нормальной переменной с математическим ожиданием α и средне-квадратическим отклонением σ_a/a^2 .

Прежде чем сказать несколько слов о последствиях такого рода действий, следует признать, что в эконометрии всякое вероятностное заключение необходимо является приближенным, поскольку природа закона распределения ошибок неизвестна. В таких условиях исполь-

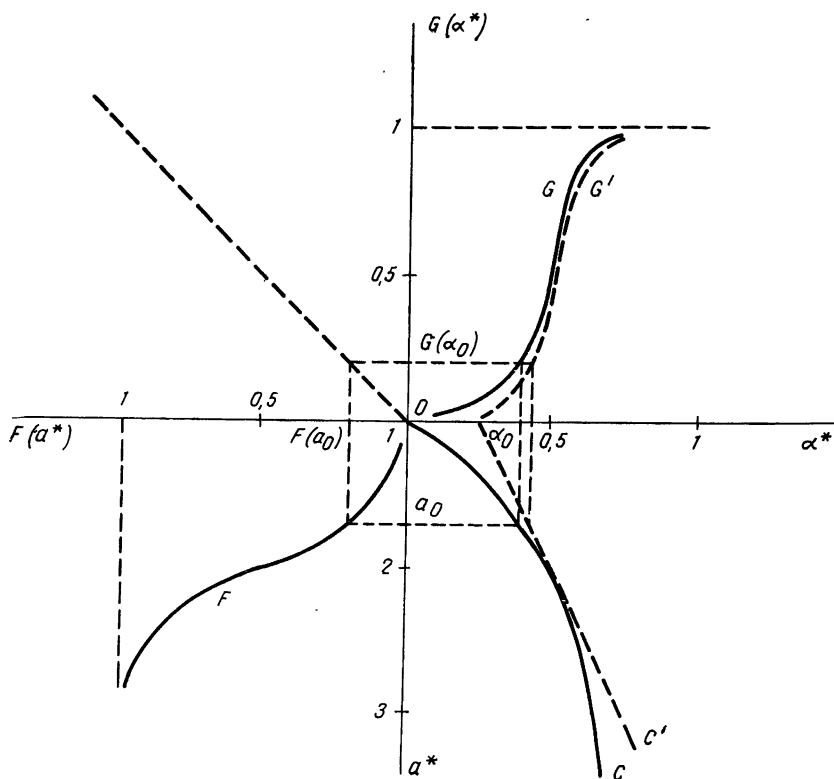


Рис. 1

зование нового приближения может не иметь никаких серьезных последствий, если связанные с ним ошибки невелики по сравнению с другими ошибками спецификации.

Влияние асимптотического приближения на свойства структурных параметров совершенно не изучалось¹. Поэтому ограничимся графической иллюстрацией проблемы на примере оценки α^* .

Рис. 1 представляет собой график, разделенный на четыре части. Первый квадрант с координатами α^* и $G(\alpha^*)$ позволяет изобразить кумулятивное распределение α^* . Второй квадрант с координатами

¹ Известное представление об этом дает различие между оценками для больших и малых выборок, а по этой проблеме имеется обширная литература.—
Прим. ред.

a^* и α^* содержит кривую C , отражающую зависимость между этими двумя оценками. Третий квадрант с координатами a^* и $F(a^*)$ содержит кривую кумулятивного распределения a^* . В четвертом квадранте нанесена биссектриса.

Этот график позволяет на основании $F(a^*)$ построить $G(\alpha^*)$. Действительно, вероятность того, что α^* будет меньше определенного заданного значения α_0 , равна вероятности того, что a^* будет меньше соответствующего значения $a_0 = 1/(1 - \alpha_0)$. Таким образом, если a_0 и α_0 представляют собой координаты определенной точки на кривой C , мы имеем $G(\alpha_0) = F(a_0)$. Способ построения G в этом случае очевиден.

Для отображения асимптотического приближения достаточно действовать идентичным образом, заменив C прямой C' , которая является касательной к ней в точке, отражающей истинные значения параметров. Так, получаем новую кривую кумулятивного распределения G' .

На рис. 1 для a^* взято симметричное распределение, близкое к нормальному. Приближенное распределение G' в этом случае также будет симметричным. Распределение G имеет такую же медиану (истинное значение) и явно асимметрично. Можно заметить, что G' недооценивает вероятность малых значений α^* и несколько переоценивает вероятность больших значений. Доверительный интервал, построенный на основе асимптотического приближения, будет слишком коротким и сдвинут вправо по сравнению с доверительным интервалом, построенным на основе распределения a^* .

Приведенные выше замечания относятся к моделям более общим по сравнению с той, которая использовалась в нашем примере. Всякий раз, когда существует двусторонняя однозначная связь между структурными параметрами и коэффициентами приведенной формы, можно использовать косвенную регрессию. Для приведенной формы и полученных с ее помощью прогнозов оценки обладают свойствами моделей множественной регрессии. Необходимые вероятностные заключения относительно некоторых структурных параметров можно сделать на основе асимптотически нормальных распределений. Для определения этих распределений достаточно продифференцировать выражение зависимости между структурными параметрами и коэффициентами приведенной формы. Точные распределения, которым подчиняются оценки структурных параметров при нормальном распределении отклонений, практически никогда не используются. Эти распределения относятся к несколько необычному типу и плохо поддаются вычислениям¹.

¹ Внимание читателя следует обратить на исследование [29], в котором автор рассмотрел приведенную выше модель (1) и предположил, что η_t имеют нормальное распределение. Он определил для этого случая точные распределения определенной в тексте оценки α^* и оценки $\hat{\alpha}$, получаемой на основе прямой регрессии для первого уравнения (1). Распределение α^* имеет более вытянутые хвосты по сравнению с распределением $\hat{\alpha}$, но оно лучше центрировано вокруг истинного значения. Даже в малых выборках α^* , очевидно, следует предпочесть $\hat{\alpha}$.

2. Ограничения на распределение ошибок

Исследуя в предыдущей главе модели спроса и предложения, мы рассмотрели случай, когда спрос зависит от одной только цены, тогда как предложение зависит от цены и одной экзогенной переменной. Рассмотрим снова этот тип модели¹.

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} + \lambda_1 + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \gamma_2 z_t + \lambda_2 + \eta_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где x_1 и x_2 — эндогенные переменные, z — экзогенная переменная, η_1 и η_2 — ошибки, β , γ и λ — неизвестные структурные параметры.

Приведенная форма модели имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= a_1 z_t + b_1 + \varepsilon_{1t}, \\ x_{2t} &= a_2 z_t + b_2 + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , ошибки ε_1 и ε_2 определяются из

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \delta \beta_{12} \gamma_2, \quad a_2 = \delta \gamma_2, \quad b_1 = \delta (\lambda_1 + \beta_{12} \lambda_2), \\ b_2 &= \delta (\lambda_2 + \beta_{21} \lambda_1), \quad \varepsilon_{1t} = \delta (\eta_{1t} + \beta_{12} \eta_{2t}), \\ \varepsilon_{2t} &= \delta (\eta_{2t} + \beta_{21} \eta_{1t}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем по определению

$$\delta = \frac{1}{1 - \beta_{12} \beta_{21}}.$$

Как уже было показано, определение приведенной формы модели не приводит к однозначной оценке структурных параметров по крайней мере, если ничего не известно относительно распределения пары (η_{1t}, η_{2t}) . Не все эти параметры поддаются оценке. Несомненно, всегда можно рассчитать:

$$\beta_{12} = a_1/a_2 \text{ и } \lambda_1 = b_1 - (a_1/a_2) b_2.$$

Но для β_{21} можно принять любое значение, кроме a_2/a_1 , и затем рассчитать $\gamma_2 = a_2 - \beta_{21} a_1$ и $\lambda_2 = b_2 - \beta_{21} b_1$. Таким образом, можно идентифицировать только первое структурное уравнение.

В некоторых моделях иногда предполагают, что ошибки различных структурных уравнений независимы друг от друга, поскольку считается, что каждое уравнение отражает линию поведения, зависящую от специфических факторов. Если эту гипотезу добавить к модели (7), то идентификация всех структурных параметров будет обеспечена.

Действительно, запишем эту гипотезу:

$$E(\eta_{1t} \eta_{2t}) = 0. \quad (10)$$

Отношения (9) предполагают;

$$\eta_{1t} = \varepsilon_{1t} - \beta_{12} \varepsilon_{2t}, \quad \eta_{2t} = \varepsilon_{2t} - \beta_{21} \varepsilon_{1t}.$$

¹ Дополнительно с этим типом модели можно ознакомиться по книге Г. Тинтне р. Введение в эконометрию, гл. 6. М., «Статистика», 1965.— Прим. ред.

Таким образом, условие (10) приводит к

$$\beta_{21} E(\epsilon_{1t}^2) - (1 + \beta_{12} \beta_{21}) E(\epsilon_{1t} \epsilon_{2t}) + \beta_{12} E(\epsilon_{2t}^2) = 0. \quad (11)$$

Но оценки моментов второго порядка ϵ_{1t} и ϵ_{2t} можно найти при тех же условиях, что и оценки коэффициентов приведенной формы. Если размеры выборки неограниченно возрастают и выполняются условия асимптотической сходимости, моменты второго порядка эмпирических отклонений регрессий эндогенных переменных по экзогенным стремятся по вероятности к моментам второго порядка ϵ_{1t} и ϵ_{2t} . При таких условиях отношение (11) позволяет однозначно определить β_{21} на основе значений моментов второго порядка и значения β_{12} (равного a_1/a_2).

Обобщая, можно сказать, что введение априорных гипотез относительно ошибок структурных уравнений может обеспечить идентификацию параметров, которые без этих гипотез не поддаются оценке. Эти гипотезы выступают как априорные ограничения на структурную форму модели. Они играют ту же роль, что и ограничения, обуславливающие отсутствие некоторых переменных в отдельных уравнениях.

Рассмотрим теперь процесс оценки структурных параметров. Исследуем сначала случай, когда о корреляции между η_{1t} и η_{2t} априори ничего не известно.

Как и в предыдущем примере, можно рассмотреть возможность использования косвенной регрессии для оценки β_{12} и λ_1 . Свойства оценок β_{12}^* и λ_1^* будут сходными со свойствами определенных в этом примере оценок α^* и β^* . Выражения этих оценок обнаруживают аналогию, которая в дальнейшем будет использована.

Действительно, пусть a_1^* , a_2^* , b_1^* и b_2^* будут оценками приведенной формы. Косвенная регрессия дает для β_{12} и λ_1 оценки:

$$\beta_{12}^* = a_1^*/a_2^* \quad \text{и} \quad \lambda_1^* = b_1^* - \beta_{12}^* b_2^*,$$

на основе которых можно легко найти выражения:

$$\beta_{12}^* = \frac{\sum_t (x_{1t} - \bar{x}_1)(z_t - \bar{z})}{\sum_t (x_{2t} - \bar{x}_2)(z_t - \bar{z})}; \quad \lambda_1^* = \bar{x}_1 - \beta_{12}^* \bar{x}_2. \quad (12)$$

Мы получили бы совершенно такие же оценки, как и в случае использования z_t для выравнивания по первому структурному уравнению в качестве инструментальной переменной:

$$x_{1t} = \beta_{12} x_{2t} + \lambda_1 + \eta_{1t}$$

(см. гл. 10, § 7).

Действительно, легко заметить, что здесь имеет место случай, благоприятный для использования z_t в качестве инструментальной переменной. Пусть y_{1t} и y_{2t} — математические ожидания x_{1t} и x_{2t} (условные по отношению к z_t). Приведенная форма предполагает:

$$y_{1t} = a_1 z_t + b_1 \quad \text{и} \quad y_{2t} = a_2 z_t + b_2,$$

поэтому первое структурное уравнение можно записать в виде:

$$y_{1t} = \beta_{12} y_{2t} + \lambda_1.$$

Согласно гипотезе ошибки ε_{1t} и ε_{2t} переменных x_{1t} и x_{2t} не зависят от z_t и эта последняя переменная находится в тесной корреляционной связи с «истинными переменными» y_{1t} и y_{2t} . Из исследования гл. 10, § 7 следует, что в таких случаях особенно рекомендуется использование z_t в качестве инструментальной переменной.

Оценка с помощью инструментальных переменных была предложена на основе общих рассуждений, которые мы напомним. Для этого прежде всего допустим, что экзогенные переменные являются случайными и их значения можно рассматривать как результат T независимых выборок с одинаковым законом распределения.

Для упрощения выражений используем два особых обозначения для теоретических и для эмпирических моментов второго порядка. Положим:

$$E[x_{1t} - E(x_{1t})]^2 = [x_1^2], \quad E\{[x_{1t} - E(x_{1t})][z_t - E(z_t)]\} = [x_1 z];$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_{1t} - \bar{x}_1)^2 = [x_1^2], \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_{1t} - \bar{x}_1)(z_t - \bar{z}) = [x_1 z].$$

Рассматриваемые в дальнейшем модели предполагают существование некоторых отношений между структурными параметрами и теоретическими моментами второго порядка наблюдаемых переменных. В соответствии с методом инструментальных переменных оценки параметров получаются в результате решения некоторых из этих отношений после замены в них теоретических моментов эмпирическими.

Так, первое уравнение модели (7) предполагает:

$$[x_1 z] = \beta_{12} [x_2 z]. \quad (13)$$

Оценка β_{12} , β_{12}^* получается в результате решения:

$$[x_1 z] = \beta_{12}^* [x_2 z]. \quad (14)$$

При неограниченном увеличении числа наблюдений эмпирические моменты стремятся по вероятности к теоретическим моментам по крайней мере в случае применимости к ним закона больших чисел. Последнее мы и будем предполагать. Отсюда следует, что в общем случае оценки по методу инструментальных переменных сходятся к истинным значениям соответствующих параметров.

Легко понять, что гипотеза случайности экзогенных переменных не является здесь основной. Достаточно, если относительно предельного поведения последовательности этих переменных можно выдвинуть гипотезу, аналогичную той, которая была изложена в гл. 6 (гипотеза 5). Наблюдаемые моменты второго порядка и в этом случае будут стремиться к пределам, подчиняющимся выше приведенным отношениям для теоретических моментов, которые существуют только для случайных экзогенных переменных.

Рассмотрим, например, отношение (14) и предположим, что \bar{z} и $[z^2]$ стремятся к пределам z^0 и S^2 , причем $S^2 > 0$. В силу системы при-

веденных уравнений (8), $[x_1 z]$ и $[x_2 z]$ стремятся по вероятности соответственно к $a_1 S^2$ и $a_2 S^2$. Таким образом, вместо отношений (13) можно записать:

$$\lim [x_1 z] = \beta_{12} \lim [x_2 z],$$

что позволяет таким же образом установить состоятельность β_{12}^* .

Для выбора отношений будем поступать так, как если бы экзогенные переменные были случайными, т. е. будем использовать теоретические моменты, которые не существуют для неслучайных экзогенных переменных.

Применим изложенный выше принцип к оценке структурных параметров в случае, когда априори известно, что ошибки η_{1t} и η_{2t} независимы. На основе трех гипотез:

$$[[z\eta_1]] = 0; \quad [[z\eta_2]] = 0; \quad [[\eta_1 \eta_2]] = 0,$$

которые можно также записать в другом виде:

$$\begin{aligned} [[x_1 z]] - \beta_{12} [[x_2 z]] &= 0; \\ [[x_2 z]] - \beta_{21} [[x_1 z]] - \gamma_2 [[z^2]] &= 0; \\ (1 + \beta_{12} \beta_{21}) [[x_1 x_2]] - \beta_{21} [[x_1^2]] - \beta_{12} [[x_2^2]] - \\ &\quad - \gamma_2 [[x_1 z]] + \gamma_2 \beta_{12} [[x_2 z]] = 0 \end{aligned}$$

легко получаем три отношения между теоретическими моментами второго порядка. К тому же, используя первое отношение, можно исключить два последних члена правой части третьего отношения.

Состоятельные оценки β_{12} , β_{21} и γ_2 получаются в результате решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [x_1 z] - \beta_{12}^* [x_2 z] &= 0, \\ [x_2 z] - \beta_{21}^* [x_1 z] - \gamma_2^* [z^2] &= 0, \\ (1 + \beta_{12}^* \beta_{21}^*) [x_1 x_2] - \beta_{21}^* [x_1^2] - \beta_{12}^* [x_2^2] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

К ним легко добавляются состоятельные оценки λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1^* = \bar{x}_1 - \beta_{12}^* \bar{x}_2, \quad \lambda_2^* = \bar{x}_2 - \beta_{21}^* \bar{x}_1 - \gamma_2^* \bar{z}. \quad (16)$$

Эти оценки можно было бы получить и другим путем. Действительно, они соответствуют *максимуму правдоподобия*, если (η_{1t}, η_{2t}) имеет нормальное распределение с независимыми от t дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и нулевой ковариацией, поскольку относящиеся к различным наблюдениям ошибки независимы между собой. Таким образом, в этом случае рассматриваемые оценки обладают максимальной асимптотической эффективностью. Если распределение ошибок не слишком отличается от нормального и если удовлетворяются другие выдвинутые выше условия, оценки также должны обладать хорошей асимптотической эффективностью.

Итак, докажем, что в определенном выше случае они эквивалентны оценкам максимального правдоподобия. Плотность распределения T пар (η_{1t}, η_{2t}) в этом случае равна:

$$(2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-T} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\eta_{1t}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta_{2t}^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}.$$

Поскольку якобиан преобразования (η_{1t}, η_{2t}) в (x_{1t}, x_{2t}) равен $(1 - \beta_{12}\beta_{21})$, плотность распределения T пар (x_{1t}, x_{2t}) равна:

$$(2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-T} (1 - \beta_{12}\beta_{21})^T \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sigma_1^2} (x_{1t} - \beta_{12}x_{2t} - \lambda_1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sigma_2^2} (x_{2t} - \beta_{21}x_{1t} - \gamma_2 z_t - \lambda_2)^2 \right] \right\}.$$

При исключении постоянной части логарифм этой плотности равен:

$$-T \lg \sigma_1 \sigma_2 + T \lg (1 - \beta_{12} \beta_{21}) - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^T (x_{1t} - \beta_{12} x_{2t} - \lambda_1)^2 - \\ - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^T (x_{2t} - \beta_{21} x_{1t} - \gamma_2 z_t - \lambda_2)^2. \quad (17)$$

Чтобы его значение было максимальным для λ_1 и λ_2 , необходимо выполнение условий:

$$\lambda_1 = \bar{x}_1 - \beta_{12} \bar{x}_2; \quad \lambda_2 = \bar{x}_2 - \beta_{21} \bar{x}_1 - \gamma_2 \bar{z}. \quad (18)$$

После деления на T и замены λ_1 и λ_2 вышеприведенными значениями (17) принимает вид:

$$- \lg \sigma_1 \sigma_2 + \lg (1 - \beta_{12} \beta_{21}) - \frac{1}{2\sigma_1^2} [(x_1 - \beta_{12} x_2)^2] - \\ - \frac{1}{2\sigma_2^2} [(x_2 - \beta_{21} x_1 - \gamma_2 z)^2], \quad (19)$$

где квадратные скобки, как и выше, условно обозначают эмпирические моменты.

Для определения максимума этого выражения запишем сначала условия, вытекающие из равенства нулю производных по σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1^2 = [(x_1 - \beta_{12} x_2)^2], \quad \sigma_2^2 = [(x_2 - \beta_{21} x_1 - \gamma_2 z)^2]. \quad (20)$$

Приравняв нулю производные по структурным параметрам, получаем:

$$\frac{-\beta_{21}\sigma_1^2}{1-\beta_{21}\beta_{12}} + [x_1 x_2] - \beta_{12}[x_2^2] = 0; \quad (21)$$

$$\frac{-\beta_{12}\sigma_2^2}{1-\beta_{21}\beta_{12}} + [x_2 x_1] - \beta_{21}[x_1^2] - \gamma_2[x_1 z] = 0; \quad (22)$$

$$[x_2 z] - \beta_{21}[x_1 z] - \gamma_2[z^2] = 0. \quad (23)$$

После умножения на $(1 - \beta_{21}\beta_{12})$ и замены σ^2_1 его значением (20) отношение (21) принимает вид:

$$(1 + \beta_{12}\beta_{21}) [x_1x_2] - \beta_{21} [x_1^2] - \beta_{12} [x_2^2] = 0. \quad (24)$$

Преобразуя таким же образом (22) и учитывая (24), получаем:

$$(1 + \beta_{12}\beta_{21}) [x_1z] - 2 \beta_{12} [x_2z] + \beta_{12}\gamma_2 [z^2] = 0.$$

Это выражение, учитывая условие (23), сводится к

$$[x_1z] - \beta_{12} [z^2] = 0. \quad (25)$$

Соотношения (25), (23) и (24) идентичны соотношениям (15), а соотношения (18) — соотношениям (16). Таким образом, мы установили справедливость нашего утверждения.

В последующих примерах у нас будет возможность сопоставить метод оценки с помощью инструментальных переменных и метод максимума правдоподобия при предположении нормального распределения ошибок. Но мы не будем больше возвращаться к систематическому исследованию оценок структурных параметров в моделях с априорными ограничениями на распределение ошибок. Выводы этого параграфа показывают, как можно подойти к этой проблеме.

3. Оценка отдельного уравнения в переопределенной (сверхидентифицированной) модели

Как было показано в предыдущей главе, априорные ограничения для коэффициентов и ошибок структурных уравнений можно преобразовать в ограничения для приведенной формы. Принцип оценки на основе косвенной регрессии в этом случае уже будет неприменим. Следует рассмотреть другие возможные методы. В соответствии с принятой в этой главе точкой зрения рассмотрим этот вопрос с помощью простого примера. Обобщение определяемых ниже методов будет сделано в гл. 20.

Пусть имеется модель из двух эндогенных и двух экзогенных переменных. Система структурных уравнений ее имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} && + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \gamma_{23} z_{3t} + \gamma_{24} z_{4t} + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Математические ожидания ошибок η_{1t} и η_{2t} равны нулю. Но относительно их ковариационной матрицы не делается никаких предположений. Единственные априорные ограничения заключаются в отсутствии z_{3t} и z_{4t} в числе переменных первого структурного уравнения. Эта модель не содержит постоянных членов. Но в результате некоторого усложнения выводов последующие результаты можно применить и к подобной модели с постоянными членами.

Запишем приведенную форму модели:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= a_{13} z_{3t} + a_{14} z_{4t} + \varepsilon_{1t}, \\ x_{2t} &= a_{23} z_{3t} + a_{24} z_{4t} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Коэффициенты приведенной формы выводятся из коэффициентов структурных уравнений на основе соотношений:

$$\left. \begin{aligned} a_{13} &= \delta \beta_{12} \gamma_{23}, & a_{14} &= \delta \beta_{12} \gamma_{24}, \\ a_{23} &= \delta \gamma_{23}, & a_{24} &= \delta \gamma_{24}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где по определению

$$\delta = \frac{1}{1 - \beta_{12} \beta_{21}}.$$

Из этих соотношений легко найти:

$$\beta_{12} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{a_{14}}{a_{24}}. \quad (29)$$

Таким образом, первое структурное уравнение является идентифицируемым. Второе структурное уравнение не поддается оценке, так как можно произвольно установить значение β_{21} при условии, что оно будет отличаться от a_{23}/a_{13} , и вывести из него значения γ_{23} и γ_{24} . Следовательно, здесь будем рассматривать только оценку первого уравнения, т. е. оценку параметра β_{12} .

Модель является переопределенной (сверхидентифицированной), так как на коэффициенты приведенной формы существует ограничение. Условие (29) предполагает, что коэффициенты при z_{3t} и z_{4t} в обоих уравнениях должны быть пропорциональными.

Столкнувшись с такого рода ситуацией можно либо попытаться произвести выравнивание по первому структурному уравнению, учитывая существование второго уравнения, в котором содержатся z_{3t} и z_{4t} , либо попытаться получить оценку приведенной формы при наличии ограничения (29). Используем сначала первый подход. Он будет удовлетворительным, если нас интересует только первое структурное уравнение. Затем рассмотрим методы оценки приведенной формы. Они применяются в том случае, когда модель предполагается использовать в полном виде для прогнозирования.

В дальнейшем будем предполагать, что η_{1t} и η_{2t} имеют нулевые математические ожидания при любых значениях z_{3t} и z_{4t} , что эти ошибки для всех наблюдений имеют одинаковые дисперсии (σ_1^2 и σ_2^2), одинаковую ковариацию (σ_{12}) и что относящиеся к различным наблюдениям ошибки независимы друг от друга. Предположим также, что последовательность векторов z_t из компонент z_{3t} и z_{4t} такова, что матрица

$$M_{zz} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t z_t'$$

сходится к невырожденной матрице

$$\begin{bmatrix} S_3^2 & S_{34} \\ S_{34} & S_4^2 \end{bmatrix}.$$

Наконец, через

$$\begin{bmatrix} V_3^2 & V_{34} \\ V_{34} & V_4^2 \end{bmatrix}$$

будем обозначать матрицу, обратную M_{zz} .

Для оценки первого, структурного уравнения прежде всего можно вспомнить о *косвенной регрессии*. В этом случае рассчитаем коэффициенты a_{13}^* , a_{14}^* , a_{23}^* , a_{24}^* двух регрессий x_{1t} и x_{2t} по z_{3t} и z_{4t} :

$$a_{13}^* = [x_1 z_3] V_3^2 + [x_1 z_4] V_{34};$$

$$a_{23}^* = [x_2 z_3] V_3^2 + [x_2 z_4] V_{34}.$$

Затем примем, например, $\beta_{12}^* = \frac{a_{13}^*}{a_{23}^*}$ и получим, таким образом, состоятельную оценку, поскольку a_{13}^* и a_{23}^* стремятся соответственно к истинным значениям a_{13} и a_{23} . Но в этом случае мы пренебрегаем информацией, содержащейся в значениях a_{14}^* и a_{24}^* , являющихся оценками двух коэффициентов a_{14} и a_{24} , отношение которых равно β_{12} .

Прежде чем перейти к оценкам без этой особенности, рассмотрим оценки, получающиеся при использовании z_3 либо z_4 в качестве *инструментальной переменной* в первом уравнении. Поскольку согласно гипотезе $[z_3 \eta_1] = 0$ и $[z_4 \eta_1] = 0$ использование этого метода вполне оправдано. Таким образом, состоятельные оценки можно получить на основе двух следующих формул:

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum x_{1t} z_{3t}}{\sum x_{2t} z_{3t}}; \quad \tilde{\beta}_{12} = \frac{\sum x_{1t} z_{4t}}{\sum x_{2t} z_{4t}}. \quad (30)$$

Разумеется, эти две оценки в общем случае не совпадают. Может возникнуть вопрос, какую из них использовать. Поскольку и первая, и вторая сходятся к истинному значению β_{12} , элементарное правило заключается в использовании оценки с меньшей асимптотической дисперсией.

Асимптотические дисперсии $\hat{\beta}_{12}$ и $\tilde{\beta}_{12}$ можно рассчитать на основе применения общих принципов гл. 10, § 7. Рассмотрим, например, $\hat{\beta}_{12}$. Уравнение, из которого определяется эта оценка, можно записать:

$$\hat{\beta}_{12} [x_2 z_3] = [x_1 z_3]$$

или, учитывая первое структурное уравнение:

$$(\hat{\beta}_{12} - \beta_{12}) [x_2 z_3] = [\eta_1 z_3].$$

Выражение $TE ([\eta_1 z_3])^2$ стремится к $\sigma_1^2 S_3^2$, тогда как $[x_2 z_3]$ стремится к пределу, который можно записать в форме $r_{23} S_2 S_3$, обозначив через S_2^2 предел $[x_2^2]$ и через r_{23} — предельный коэффициент корреляции между x_2 и z_3 . Таким образом, асимптотическая дисперсия $\sqrt{T} (\hat{\beta}_{12} - \beta_{12})$ равна

$$\frac{\sigma_1^2}{r_{23}^2 S_2^2}. \quad (31)$$

Точно так же асимптотическая дисперсия $\sqrt{T} (\tilde{\beta}_{12} - \beta_{12})$ равна

$$\frac{\sigma_1^2}{r_{24}^2 S_2^2}.$$

Обобщая, можно сказать, что в качестве инструментальной переменной для оценки первого структурного уравнения следует выбрать ту из переменных z_3 и z_4 , которая находится в более тесной корреляционной связи с x_2 .

Использование экзогенных переменных модели в качестве инструментальных переменных может иметь менее строгую форму. Пусть w_t — произвольная линейная комбинация z_{3t} и z_{4t} :

$$w_t = v_3 z_{3t} + v_4 z_{4t}.$$

Эта новая величина также может служить инструментальной переменной¹, поскольку

$$[\eta_1 w] = v_3 [\eta_1 z_3] + v_4 [\eta_1 z_4] = 0.$$

Но при соответствующем выборе v_3 и v_4 в общем случае можно найти переменную w , которая будет более тесно коррелировать с x_2 , чем z_3 или z_4 , и получить, таким образом, для β_{12} асимптотически более точную оценку, чем $\hat{\beta}_{12}$ или $\tilde{\beta}_{12}$.

Действительно, рассмотрим в T -мерном пространстве векторы z_4 , z_3 , и x_2 , представляющие две экзогенные и вторую эндогенную переменные. Пусть L будет двумерным линейным подпространством, порождаемым линейными комбинациями z_3 и z_4 . Переменная w наиболее сильно коррелирующая с x_2 представлена вектором подпространства L , который образует с x_2 наименьший возможный угол², т. е. вектором, коллинеарным проекции x_2^* на L .

¹ Читатель при желании легко установит, что можно найти оценку косвенной регрессии β_{12}^* , если использовать в качестве инструментальной переменной частное значение w_t , которое определяется из $v_3 = V_3^2$ и $v_4 = V_{34}$.

² Действительно, возьмем произвольное w_t . Определение x_{2t}^* предполагает:

$$\sum_t w_t (x_{2t} - x_{2t}^*) = 0, \text{ т. е. } \sum_t w_t x_{2t} = \sum_t w_t x_{2t}^*.$$

Коэффициент корреляции между x_{2t} и w_t , очевидно, не превышает коэффициента корреляции между x_{2t} и x_{2t}^* , так как это свойство может быть записано:

$$\frac{\{\sum x_{2t} w_t\}^2}{\sum x_{2t}^2 \sum w_t^2} \leq \frac{\{\sum x_{2t} x_{2t}^*\}^2}{\sum x_{2t}^2 \sum (x_{2t}^*)^2}.$$

С учетом вышеприведенного равенства, это эквивалентно:

$$\frac{\{\sum x_{2t}^* w_t\}^2}{\sum w_t^2} \leq \frac{\{\sum (x_{2t}^*)^2\}^2}{\sum (x_{2t}^*)^2},$$

и означает, что коэффициент корреляции между x_{2t}^* и w_t по абсолютной величине не превышает 1.

Но компоненты x_{2t}^* являются выравненными значениями x_{2t} в регрессии по методу наименьших квадратов x_2 по z_3 и z_4 . Соответствующая оценка равна:

$$\beta_{12}^0 = \frac{\sum x_{1t} x_{2t}^*}{\sum x_{2t} x_{2t}^*}$$

и может быть также записана в виде:

$$\beta_{12}^0 = \frac{\sum x_{1t} x_{2t}^*}{\sum (x_{2t}^*)^2}, \quad (32)$$

поскольку x_2^* ортогонален $x_2 - x_2^*$.

Формула (32) показывает, что коэффициент β_{12}^0 можно оценить двухшаговым применением метода наименьших квадратов. На первом этапе определяются регрессии x_2 по z_3 и z_4 и расчетные значения x_{2t} , x_{2t}^* . На втором этапе регрессии x_1 по x_2^* позволяет получить оценку β_{12}^0 .

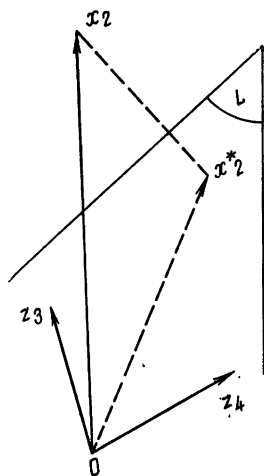


Рис. 2

Дадим обоснование такого «выравнивания по двухшаговому методу наименьших квадратов» в общем контексте и покажем, что на практике он часто является лучшим методом для оценки переопределенных моделей. Этот метод связан со сравнительно несложными расчетами и дает результаты достаточно высокой точности.

Можно понять интерес, который представляет этот метод выравнивания. Действительно, поскольку коэффициенты множественной регрессии являются состоятельными оценками, при неограниченном увеличении размеров выборки x_{2t}^* стремится по вероятности к $a_{23}z_{3t} + a_{24}z_{4t}$. В пределе корреляция ошибок η и ϵ с x_{2t}^* равна нулю. Можем записать:

$$x_{1t} = \beta_{12} x_{2t}^* + \xi_t. \quad (33)$$

Ошибка ξ_t здесь равна выражению:

$$\eta_{1t} + \beta_{12} (x_{2t} - x_{2t}^*),$$

которое стремится по вероятности к $\eta_{1t} + \beta_{12} \epsilon_{2t}$. Поскольку предельная корреляция ξ_t с x_{2t}^* равна нулю, отношение (33) асимптотически удовлетворяет условиям, необходимым для того, чтобы регрессия по методу наименьших квадратов давала несмещенную и эффективную оценку.

При выравнивании по двухшаговому методу наименьших квадратов можно идти двумя различными путями. Действительно, можно сначала получить из множественной регрессии x_{1t} по z_{3t} и z_{4t} расчетные

значения x_{1t} , x_{1t}^* , затем определить регрессию x_{2t} по x_{1t}^* . Таким образом, получим оценку β_{12}^{00} , определяемую из

$$\frac{1}{\beta_{12}^{00}} = \frac{\sum x_{2t} x_{1t}^*}{\sum (x_{1t}^*)^2}.$$

Можно легко убедиться, что в общем случае β_{12}^{00} не равно β_{12}^0 .

Хотя β_{12}^0 должно быть получено после определения «оптимальной» линейной комбинации экзогенных переменных z_{3t} и z_{4t} , отличающуюся от него оценку β_{12}^{00} можно определить, применяя тот же принцип. Это обстоятельство легко объяснимо. Для определения β_{12}^0 мы рассмотрели отношение $x_{1t} = \beta_{12} x_{2t} + \eta_{1t}$ и использовали в качестве критерия асимптотическую дисперсию оценки β_{12} . Соответственно мы искали линейную комбинацию z_3 и z_4 , которая наиболее тесно коррелирует с x_2 . Мы могли бы определить β_{12}^{00} , если бы рассмотрели отношение:

$$x_{2t} = \frac{1}{\beta_{12}} x_{1t} - \frac{\eta_{1t}}{\beta_{12}}$$

и для минимизации асимптотической дисперсии оценки $1/\beta_{12}$ нашли линейную комбинацию z_3 и z_4 , которая наиболее тесно коррелирует с x_1 .

Отношения между различными оценками видны на рисунке, изображающем подпространство L линейных комбинаций векторов z_3 и z_4 .

На нем, кроме уже определенных векторов z_3 , z_4 , x_1^* и x_2^* , нанесены векторы y_1 и y_2 , являющиеся математическими ожиданиями x_1 и x_2 :

$$y_1 = a_{13}z_3 + a_{14}z_4;$$

$$y_2 = a_{23}z_3 + a_{24}z_4.$$

Регрессия x_1 по x_2^* отображена вектором y_1^0 , являющимся проекцией x_1 (или x_1^*) на прямую, порожденную x_2^* . Равным образом регрессия x_2 по x_1^* отображена вектором y_2^0 , являющимся проекцией x_2^* на x_1^* .

На этом рисунке оценка β_{12}^0 отражена отношением y_1^0 к x_2^* , оценка β_{12}^{00} — отношением x_1^* к y_2^0 . Таким образом, можно сказать, что оценками математических ожиданий x_1 и x_2 , y_1 и y_2 в первом случае являются y_1^0 и x_2^* , во втором случае — x_1^* и y_2^0 . В этом смысле двухшаговый метод наименьших квадратов позволяет одновременно получить оценки структурного параметра β_{12} и приведенной формы. Оценка одного из уравнений приведенной формы получается непосредственно на основе обычной множественной регрессии, оценка другого уравнения — косвенным путем, после нахождения оценки структурного параметра β_{12} .

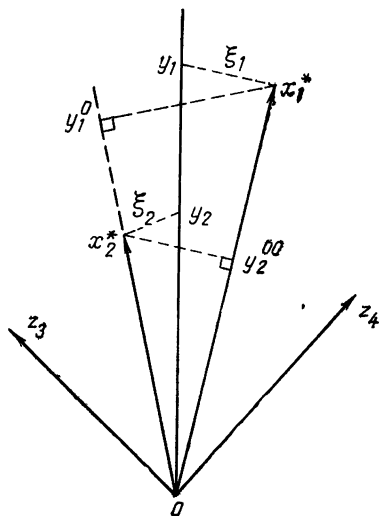


Рис. 3

Геометрическое изображение подсказывает метод оценки, который кажется априори предпочтительным как по сравнению с β_{12}^0 , так и по сравнению с β_{12}^* . В пространстве L линейных комбинаций z_3 и z_4 числовые множители этих векторов могут быть взяты в качестве координат. Векторы y_1 и y_2 в этом случае будут иметь координаты (a_{13}, a_{14}) и (a_{23}, a_{24}) , векторы x_1^* и x_2^* — координаты (a_{13}^*, a_{14}^*) и (a_{23}^*, a_{24}^*) . Можно считать, что x_1^* отличается от y_1 на «отклонение» ξ_1 с координатами $(a_{13}^* - a_{13}, a_{14}^* - a_{14})$, а x_2^* отличается от y_2 на «отклонение» ξ_2 с координатами $(a_{23}^* - a_{23}, a_{24}^* - a_{24})$.

Представляется, что для оценки общего для y_1 и y_2 направления мы должны быть заинтересованы в использовании сведений, которые можно получить относительно распределения ξ_1 и ξ_2 . Оценить это направление на основе направления x_2^* и соответственно β_{12} через β_{12}^0 значит пренебречь ξ_2 . Принять направление x_1^* и оценить β_{12} через β_{12}^0 означает пренебречь ξ_1 . Но известна оценка ковариационной матрицы четырехмерного вектора, определяемого координатами ξ_1 и ξ_2 . Следовательно, мы можем выбрать лучший образ действий, чем пренебречь одним из ξ_1 и ξ_2 .

В четырехмерном пространстве мы можем определить векторы x^* и y с координатами $(a_{13}^*, a_{14}^*, a_{23}^*, a_{24}^*)$ и $(a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24})$, а также вектор $\xi = x^* - y$. Мы знаем, что $E(x^*) = y$, нам известно трехмерное подпространство, которому в силу равенства (29) принадлежит y , мы имеем также оценку ковариационной матрицы ξ . Таким образом, для оценки y на основе x^* мы можем использовать принцип, аналогичный тому, который был изложен в гл. 9.

Полученная таким образом оценка является функцией, которую мы имели бы в результате применения метода максимального правдоподобия при гипотезе нормального распределения ошибок. Более подробно она будет рассмотрена в гл. 20 при изучении «метода комиссии Коулса». Приведенные выше рассуждения позволяют составить интуитивное представление об ее отношении к оценке по двухшаговому методу наименьших квадратов.

4. Использование регрессий в рекурсивных моделях

На протяжении предыдущей главы мы обсуждали свойства прямых регрессий как оценок структурных уравнений. Мы, в частности, обнаружили, что, если модель имеет рекурсивную форму, оценки параметров сходятся к их истинным величинам. Теперь можно несколько дополнить это исследование.

Итак, рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \gamma_1 z_t + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \gamma_2 z_t + \eta_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

с эндогенными переменными x_{1t} и x_{2t} и экзогенной переменной z_t . Относительно ошибок η_{1t} и η_{2t} примем те же гипотезы, что и раньше.

Регрессия x_{1t} по z_t без постоянного члена дает несмещенную оценку первого структурного уравнения, поскольку оно удовлетворяет основополагающим гипотезам модели простой регрессии. Если на мо-

менты порядка выше первого или на ковариационную матрицу пары (η_{1t}, η_{2t}) не накладывается никаких ограничений, второе структурное уравнение не поддается оценке, так как любая линейная комбинация двух структурных уравнений будет иметь ту же форму, что и второе уравнение.

Рассмотрим случай, когда модель (34) является рекурсивной. Ошибки η_{1t} и η_{2t} тогда независимы или по меньшей мере не коррелируют друг с другом. В силу первого структурного уравнения эта гипотеза $(E(\eta_{1t}\eta_{2t}) = 0)$ эквивалентна гипотезе $E(x_{1t}\eta_{2t}) = 0$. Поскольку, с другой стороны, $E(z_t\eta_{2t}) = 0$, выполняются основные условия для того, чтобы регрессия x_{2t} по x_{1t} и z_t давала несмещенную оценку второго структурного уравнения.

Эту регрессию можно обосновать доводами, аналогичными вышеприведенным (см. § 2 относительно модели, определяемой отношениями (7) и (10)). Действительно, отсутствие корреляции между η_{2t} и x_{1t} или z_t можно отразить условиями:

$$\left. \begin{aligned} E(x_{1t}x_{2t}) &= \beta_{21}E(x_{1t}^2) + \gamma_2E(x_{1t}z_t), \\ E(z_tx_{2t}) &= \beta_{21}E(x_{1t}z_t) + \gamma_2E(z_t^2). \end{aligned} \right\}$$

Замена теоретических моментов эмпирическими непосредственно приводит к системе нормальных уравнений регрессии x_2 по x_1 и z .

Еще легче показать, что при нормальном распределении ошибок две прямых регрессии определяют оценки максимального правдоподобия.

Действительно, логарифм плотности распределения совокупности T пар (η_{1t}, η_{2t}) при исключении постоянной в этом случае равен выражению:

$$-T \lg \sigma_1 \sigma_2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\eta_{1t}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta_{2t}^2}{\sigma_2^2} \right).$$

Поскольку якобиан преобразования (η_{1t}, η_{2t}) в (x_{1t}, x_{2t}) равен 1, логарифм плотности распределения выборки x имеет вид:

$$-T \lg \sigma_1 \sigma_2 - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^T (x_{1t} - \gamma_1 z_t)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^T (x_{2t} - \beta_{21} x_{1t} - \gamma_2 z_t)^2.$$

Для максимизации этого выражения необходимо минимизировать каждую из двух сумм квадратов в отдельности, поскольку первая сумма содержит только параметр γ_1 , который не встречается в других членах выражения, тогда как вторая сумма — и только она — содержит параметры β_{21} и γ_2 . Таким образом, приходим к прямым регрессиям по методу наименьших квадратов для каждого из обоих структурных уравнений.

Рассмотрим теперь вторую рекурсивную модель:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \gamma_1 z_t + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \eta_{2t}, \\ E(\eta_{1t} \eta_{2t}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Отличие ее от модели (34) заключается в том, что z_t не входит во второе уравнение.

Как и выше, мы можем обосновать метод выравнивания по каждому структурному уравнению на основе прямой регрессии и, следовательно, оценки γ_1 и β_{21} с помощью:

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_t x_{1t} z_t}{\sum_t z_t^2}; \quad \hat{\beta}_{21} = \frac{\sum_t x_{2t} x_{1t}}{\sum_t x_{1t}^2}.$$

В случае нормального распределения η_{1t} и η_{2t} , $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\beta}_{21}$, в частности, являются оценками максимального правдоподобия. Доказательство идентично тому, которое было приведено для предыдущей модели.

Модель (35) является переопределенной, поскольку ее идентификация обеспечена без добавления последнего условия. Действительно, рассмотрим приведенную форму:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= a_1 z_t + \varepsilon_{1t}, \\ x_{2t} &= a_2 z_t + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

с коэффициентами

$$a_1 = \gamma_1; \quad a_2 = \beta_{21}\gamma_1.$$

Легко заметить, что условие $E(\eta_{1t}\eta_{2t}) = 0$ предполагает для приведенной формы следующее ограничение:

$$a_1 E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) - a_2 E(\varepsilon_{1t}^2) = 0. \quad (37)$$

Очевидно, можно получить оценку приведенной формы, пренебрегая этим условием, на основе расчета двух регрессий, которые дают несмещенные и состоятельные оценки a_1^* и a_2^* . Из них можно вывести состоятельные оценки β_{21} и γ_1 :

$$\beta_{21}^* = \frac{a_2^*}{a_1^*} = \frac{\sum x_{2t} z_t}{\sum x_{1t} z_t};$$

$$\gamma_1^* = \frac{\sum x_{1t} z_t}{\sum z_t^2}.$$

В итоге β_{21}^* и γ_1^* получены с помощью «косвенных регрессий»¹.

¹ Читатель может убедиться, что мы получим идентичные оценки, применив определенный в § 3 двухшаговый метод наименьших квадратов, т. е. получив сначала расчетные значения x_{1t} , x_{1t}^* на основе регрессии по первому уравнению, затем заменив во втором уравнении x_{1t} на x_{1t}^* и рассчитав оценку этого уравнения с помощью регрессии. Действительно, можем записать:

$$\beta_{21}^* = \frac{\sum x_{2t} x_{1t}^*}{\sum (x_{1t}^*)^2}.$$

Эту формулу можно приблизить к формуле, определяющей β_{21} . Тот факт, что косвенные регрессии и двухшаговый метод наименьших квадратов дают одинаковый результат, связан с тем, что модель является «точно идентифицируемой» (см. гл. 18 и 20).

Интересно сделать краткое сравнение этих двух методов оценки. Они приводят к одной и той же оценке для γ_1 . Поэтому остановимся на сравнении $\hat{\beta}_{21}$ и β_{21}^* .

а) Если корреляция между η_{1t} и η_{2t} действительно равна нулю, тогда как $\hat{\beta}_{21}$, так и β_{21}^* сходятся к истинному значению β_{21} , но $\hat{\beta}_{21}$ имеет меньшую дисперсию. Действительно, для фиксированных значений x_{1t} условная дисперсия $\hat{\beta}_{21}$ равна

$$\sigma_2^2 / \sum_t x_{1t}^2,$$

условная дисперсия β_{21}^* равна

$$\sigma_2^2 \frac{\sum_t z_t^2}{\left[\sum_t x_{1t} z_t \right]^2}.$$

В силу неравенства Шварца:

$$\left[\sum_t x_{1t} z_t \right]^2 \leq \sum_t x_{1t}^2 \cdot \sum_t z_t^2$$

первое выражение никогда не превышает второго. Оно будет равно ему только в том случае, если x_{1t} будут строго пропорциональны z_t . Эту возможность можно исключить, поскольку условная дисперсия $\hat{\beta}_{21}$ всегда превышает условную дисперсию $\hat{\beta}_{21}$; то же самое можно сказать о безусловных дисперсиях.

б) Если корреляция между η_{1t} и η_{2t} отличается от нуля, $\hat{\beta}_{21}$ все же сходится к истинному значению β_{21} , тогда как $\hat{\beta}_{21}$ сходится к другой величине, а именно

$$\beta_{21} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\lim \frac{1}{T} \sum x_{1t}^2},$$

где ρ — коэффициент корреляции между η_{1t} и η_{2t} .

Таким образом, если мы уверены, что имеем дело с рекурсивной моделью с независимыми ошибками в двух структурных уравнениях, предпочтительно применить к структурным уравнениям прямые регрессии. Помимо удобства расчетов, соответствующие оценки, очевидно, обладают наилучшими статистическими свойствами.

Напротив, если есть основания опасаться сильной корреляции между ошибками различных уравнений, несмотря на треугольную форму матрицы коэффициентов, во избежание последствий «ошибки спецификации» можно предпочесть косвенные регрессии.

Эти выводы имеют общий характер. Косвенные регрессии, двухшаговый метод наименьших квадратов и другие методы такого же характера могут с большим успехом применяться для оценки моделей, в которых матрица коэффициентов имеет треугольную форму. Применение к различным структурным уравнениям прямых регрессий имеет определенные преимущества только в том случае, когда ошибки различных структурных уравнений можно считать независимыми.

ГЛАВА 18. ИДЕНТИФИКАЦИЯ

1. Структурная форма моделей

В двух предыдущих главах в процессе обсуждения некоторых конкретных эконометрических задач и предварительного изучения проблем оценки были рассмотрены различные примеры моделей из системы уравнений. Систематическое изучение этих моделей будет начато с исследования проблемы идентификации структурных уравнений¹.

Необходимо выявить ряд специфических свойств идентифицируемых и сверхидентифицированных моделей. Специфический характер этих свойств будет проявляться по мере того, как мы будем сужать классы ограничений на различные параметры. Но прежде всего нужно дать общее представление о структурной и приведенной формах.

Структурная форма имеет общий вид:

$$Bx_t + Cz_t = \eta_t, \quad (1)$$

где x_t — вектор n эндогенных переменных, z_t — вектор m экзогенных переменных, η_t — вектор n ошибок. Каждое уравнение этой системы соответствует одному из определяющих модель основных законов. Установление этих законов представляет собой конечную цель эконометрических исследований.

Назначение модели в целом заключается в том, чтобы определить, каким образом на основе значений экзогенных переменных (z_t) и некоторых случайных ошибок (η_t) определяются значения эндогенных переменных. Соответственно система (1) для всей совокупности заданных значений z_t и η_t должна иметь единственное решение относительно x_t . Это является обоснованием следующей гипотезы.

Гипотеза 1. Матрица B невырождена.

Иногда модель содержит не только собственно экзогенные переменные, но и запаздывающие значения некоторых эндогенных пере-

¹ При ознакомлении с этой главой читателю будет полезно обратиться к работе Т. Кулманса [178]. (См. также более новую работу F. Fisher. Identification in Econometrics, № 4, 1966. На русском языке проблема идентификации применительно к техническим системам в доступной форме изложена в работе Н. Райбмана «Что такое идентификация». М., 1971.— Прим. ред.)

менных. Для сохранения простоты обозначений чаще всего будет использоваться вышеприведенное выражение (1). В нем вектор z_t будет иметь в качестве компонент совокупность заранее определенных переменных наблюдения t — экзогенных переменных в собственном смысле слова и значений эндогенных переменных с запаздыванием. Для решения некоторых проблем и, в частности, для идентификации наличие эндогенных переменных с запаздываниями не влияет на ход рассуждений и выводы. Поэтому о них не будет говорить специально при формализации моделей.

Спецификация модели включает в себя не только список эндогенных и экзогенных переменных, но и более точные предпосылки. Их удобно разделить на три категории — *общую стохастическую гипотезу, априорные ограничения и правило нормализации*.

Общая стохастическая гипотеза относится к закону распределения ошибок. Для изучения проблемы идентификации в этой главе примем следующую гипотезу.

Гипотеза 2. Ошибки η_t независимы и подчиняются одинаковому закону распределения с нулевым математическим ожиданием.

Гипотеза 2 является более строгой, чем это необходимо. Читатель может убедиться, что определяемые свойства сохраняют силу и в том случае, если η_t образуют стационарный стохастический процесс с нулевым математическим ожиданием. Но доказательство в этом случае будет более трудным. При этом нам будет необходимо усилить общую стохастическую гипотезу для разработки теории оценки параметров и статистических критериев. Будем, например, предполагать, что вектор η_t имеет ковариационную матрицу Σ или что он обладает моментами любого порядка, или даже что он нормально распределен.

Априорные ограничения относятся в основном к значениям коэффициентов B и C и распределению ошибок η_t . В частности, некоторые переменные не входят в отдельные уравнения и соответствующие элементы B и C должны быть равны нулю. Иногда предполагается, что коэффициенты при одной и той же переменной в разных уравнениях равны между собой. Ошибки различных уравнений иногда считают независимыми друг от друга; матрица Σ в этом случае является диагональной.

Разумеется, различие между общей стохастической гипотезой и априорными ограничениями чисто условно. Единственной его целью является облегчение исследования проблем идентификации. Оно не основывается на каком-либо необходимом логическом принципе.

Каждое уравнение структурной формы отражает один из законов модели. Этот закон, очевидно, не изменится, если две части уравнения умножить на одно и то же число. Во избежание связанной с этим фактом неопределенности будет удобно воспользоваться *правилом нормализации*. За исключением особо упомянутых случаев, в дальнейшем будем предполагать, что коэффициент при i -й эндогенной переменной в i -м структурном уравнении равен 1. Это условие, принятое в большинстве предыдущих примеров, предполагает, что i -я эндогенная переменная входит в i -е уравнение с ненулевым коэффициентом. Будем считать, что эта предпосылка оправдывается на практике.

Наличие среди уравнений модели *тождеств* можно отразить с помощью априорных ограничений. Но если они будут встречаться, для развития нашей теории будет удобнее использовать их в явном виде. Рассмотрим кратко, почему они возникают и каким образом их можно отразить в модели.

Для национального конъюнктурного прогнозирования недавно был изучен ряд моделей из систем уравнений. В таких случаях система часто содержит помимо структурных уравнений, о которых говорилось до сих пор, некоторые балансовые уравнения или тождества, связывающие между собой экзогенные и эндогенные переменные. Рассмотрим, например, очень простую конъюнктурную модель, в которой потребление в периоде t , C_t , есть функция полученных в этом периоде заработной платы S_t и прибылей P_t ; капиталовложения I_t являются функцией прибылей P_t и P_{t-1} ; общая сумма заработной платы представляет собой функции общего дохода R_t, R_{t-1} и временной тенденции. В балансовом равенстве, согласно которому R_t равно сумме S_t, P_t и чистых трансфертов в пользу администрации T_t , этот последний член считается экзогенной переменной. Равным образом условие равновесия на рынке товаров и услуг выражается как равенство между R_t и суммой C_t, I_t и спроса административного аппарата G_t , который также считается экзогенным¹.

Модель состоит из следующих пяти уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_t &= \delta_1 S_t + \delta_2 P_t + \delta_3 + \eta_{1t}, \\ I_t &= \delta_4 P_t + \delta_5 P_{t-1} + \delta_6 + \eta_{2t}, \\ S_t &= \delta_7 R_t + \delta_8 R_{t-1} + \delta_9 t + \delta_{10} + \eta_{3t}, \\ R_t &= S_t + P_t + T_t, \\ R_t &= C_t + I_t + G_t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь δ_i — оцениваемые коэффициенты, η_{it} — случайные отклонения, C_t, I_t, S_t, R_t, P_t — эндогенные переменные, T_t, G_t и t — экзогенные переменные.

Три первых уравнения имеют характер структурных отношений, сравнимых с зависимостями в рассматривавшихся до сих пор моделях. Два последних уравнения имеют две особенности — они не содержат ни случайных отклонений, ни неизвестных коэффициентов. Поэтому в дальнейшем будем называть их «тождествами».

Разумеется, тождества можно было бы использовать для исключения некоторых эндогенных переменных. Неудобство этого способа заключается в том, что в качестве коэффициентов структурных уравнений вводятся более или менее сложные выражения из параметров исходной формы. Каждый элемент матриц B и C уже не будет, как предполагалось ранее, либо известным, либо совершенно произвольным.

¹ Здесь используется несколько упрощенный вариант модели, предложенной Л. Клейном [170] для общего описания американской экономики. Различные авторы ссылались на эту модель для иллюстрации предложенных ими аналитических методов.

Например, можно бы исключить R_t и P_t из системы (2). В этом случае мы получим систему из трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \delta_2) C_t &= \delta_2 I_t + (\delta_1 - \delta_2) S_t + \delta_2 G_t - \delta_2 T_t + \delta_3 + \eta_{1t}, \\ (1 - \delta_4) I_t &= \delta_4 C_t - \delta_4 S_t + \delta_5 C_{t-1} + \delta_5 I_{t-1} - \delta_5 S_{t-1} + \\ &\quad + \delta_4 G_t - \delta_4 T_t + \delta_5 G_{t-1} - \delta_5 T_{t-1} + \delta_6 + \eta_{2t}, \\ S_t &= \delta_7 C_t + \delta_t I_t + \delta_8 C_{t-1} + \delta_8 I_{t-1} + \delta_7 G_t + \\ &\quad + \delta_8 G_{t-1} + \delta_9 t + \delta_{10} + \eta_{3t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

25 не равных нулю коэффициентов этой системы зависят только от 10 параметров δ_i и, таким образом, форма (3) является не очень удобной. Необходимо найти статистические методы, которые можно было бы применить непосредственно к модели в ее первой, содержащей тождества форме.

Но для теоретического обсуждения будет полезно считать, что система (1) отражает структурную форму после исключения тождеств и ввести другое общее обозначение для структурной формы, содержащей тождества. Точнее, если помимо n' чисто структурных уравнений имеется n тождеств, мы будем предполагать, что $n + n'$ эндогенных переменных делятся на две категории, определяющие соответственно вектор x_t с n компонентами и вектор q_t с n' компонентами. Деление должно осуществляться так, чтобы тождества позволяли на основании x_t и z_t определить q_t . Осуществить такое деление можно всегда, поскольку принятые в спецификации модели тождества, разумеется, линейно независимы. В этом случае мы запишем модель следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_1 x_t + B_2 q_t + C_1 z_t &= \eta_t, \\ B_3 x_t + B_4 q_t + C_2 z_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чисто структурные уравнения сгруппированы в первой части системы, тождества — во второй. По определению матрицы B_3 , B_4 и C_2 из коэффициентов тождеств точно известны. Кроме того, матрица B_4 в силу правила, принятого при распределении эндогенных переменных между x_t и q_t , является невырожденной.

В результате исключения из системы (4) q_t приходим к системе (1), в которой матрицы B и C определяются из

$$\left. \begin{aligned} B &= B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3, \\ C &= C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Поскольку B_3 , B_4 и C_2 точно известны, матрицы B и C являются линейными выражениями неизвестных матриц B , B_2 и C_1 .

Воспользуемся обозначениями:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$\bar{\eta}_t$ в этом случае является вектором из $n + n'$ компонент. Здесь гипотеза 1 интерпретируется как предположение, что матрица \bar{B}

невырождена. Это обуславливает невырожденность определяемой системой (5) матрицы B (действительно, $Bu = 0$ предполагает $B_1u = -B_2B_4^{-1}B_3u = 0$, т. е. если u представляет собой вектор $-B^{-1}_4B_3u$, одновременно $B_1u + B_2v = 0$ и $B_3u + B_4v = 0$).

2. Приведенная форма модели

В приведенной форме значение каждой эндогенной переменной является функцией экзогенных переменных (или predetermined переменных в авторегрессионных моделях) и некоторых случайных отклонений.

Запишем:

$$x_t = Az_t + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Гипотеза 1 обосновывает зависимости:

$$A = -B^{-1}C; \quad \varepsilon_t = B^{-1}\eta_t. \quad (8)$$

Если модель содержит тождества, q_t можно выразить как линейную функцию z_t и вектора ошибок χ_t . Это не добавит к приведенной форме ничего нового, поскольку q_t — известная функция x_t и z_t . Поэтому в основном мы будем придерживаться приведенной формы (7), в которую включен только вектор x_t . Тем не менее в некоторых случаях будет удобно рассматривать «расширенную приведенную форму»:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix} z_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \chi_t \end{bmatrix}, \quad (9)$$

подразумевая, что

$$H = -B_4^{-1}(B_3A + C_2); \quad \chi_t = -B_4^{-1}B_3\varepsilon_t. \quad (10)$$

В этом случае используем обозначения:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \chi_t \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Зависимость между расширенными приведенной и структурной формами в этом случае определяется соотношениями:

$$\bar{A} = -\bar{B}^{-1}\bar{C}; \quad \bar{\varepsilon}_t = \bar{B}^{-1}\bar{\eta}_t. \quad (12)$$

Приведенную форму модели можно непосредственно использовать для прогнозирования, поскольку проблема заключается в оценке значений эндогенных переменных, соответствующих предполагаемым значениям predetermined переменных. Приведенные в гл. 6, § 10 рассуждения показывают, почему $x^P_\theta = \hat{A}z_\theta$ представляет собой величину, приспособленную для прогнозирования x_θ , если z_θ известно и \hat{A} является эффективной оценкой A . Кроме того, при изучении оцен-

ки модели мы будем обращаться к приведенной форме с тем, чтобы применить общие свойства линейных и нелинейных регрессий.

Приведенная форма, как и структурная, основывается на общей стохастической гипотезе и, возможно, на априорных ограничениях. Стохастическая гипотеза обуславливает некоторые свойства ошибок. В этой главе гипотезы 1 и 2 будут предусматривать, что ε_t независимы между собой и имеют одинаковое распределение с нулевым математическим ожиданием. В дальнейшем исследовании процесса оценки и статистических критериев будет использоваться одно из следующих предположений: 1) ε_t имеют ковариационную матрицу Ω ; 2) они обладают моментами всех порядков; 3) они нормально распределены.

Так как на структурную форму накладываются ограничения, приведенную форму также можно подчинить некоторым априорным ограничениям. Ограничения на матрицы B и C и на распределение η_t могут повлиять на матрицу A и распределение ε_t . В этом случае, пользуясь выражением гл. 16, § 1, можно сказать, что модель является *сверхидентифицированной* (строгое определение будет дано несколько позже).

Значение приведенной формы обусловлено тем фактом, что оно позволяет непосредственно определить распределение эндогенных переменных. Обратное свойство тоже будет справедливым, если z_t не являются строго коллинеарными. Как было показано в гл. 6 (предположение 1), если область z_t ограничена так, что она содержит мультиколлинеарность, одному и тому же распределению x_t могут соответствовать две различные матрицы A^1 и A^2 . Для исключения этого случая выдвинем гипотезу.

Г и п о т е з а 3. Векторы z_t таковы, что не существует никакого множества не равных одновременно нулю m чисел λ_j (при $j = 1, 2, \dots, m$), таких, что

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j z_{jt} = 0 \text{ для любого } t.$$

В этом случае можно доказать:

П р е д л о ж е н и е 1. При соблюдении гипотез 1, 2 и 3 полная спецификация приведенной формы эквивалентна полной спецификации распределения эндогенных переменных.

Рассмотрим сначала случай неавторегрессионных моделей. Точно заданные матрицы A и распределение ε_t , очевидно, определяют распределение x_t для любого значения z_t . Наоборот, если задается распределение x_t как функции z_t , то в этом случае известно все о приведенной форме, так как ε_t имеет то же распределение, что и $x_t - E(x_t)$, и матрица A определяется единственным образом условием $E(x_t) = Az_t$ при любых z_t . Аналогично спецификация приведенной формы авторегрессионной модели единственным образом определяет условное распределение x_t по отношению к $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-h}$ для любого z_t . Наоборот, знание этого условного распределения, как и ранее, обуславливает знание матрицы A и распределения ε_t .

3. Определения

Рассматривая в общих чертах в гл. 2 идентификацию, мы подчеркнули различие между понятиями «модель» и «структура». Мы ввели понятие структуры для обозначения полной спецификации случайных отношений между экзогенными и эндогенными переменными. Модель в этом случае будет состоять из совокупности структур. Все структуры будут отражать отношения, удовлетворяющие одному и тому же набору гипотез (общей стохастической гипотезе и априорным ограничениям).

В модели, записанной в структурной форме (1), структура определяется заданными значениями элементов матриц B и C , а также заданным распределением η_t . Равным образом в модели, записанной в приведенной форме (2), структура определяется спецификацией значения A и распределения ε_t . Заметим, что прилагательное «структурный» и существительное «структура» имеют различный смысл. Но это не должно служить источником недоразумений.

Теперь введем несколько формальных определений для понятий, которые уже рассматривались в гл. 2.

Определение 1. В модели, удовлетворяющей гипотезам 1 и 2, две структуры S и S' называются *эквивалентными*, если они предполагают одно и то же распределение вероятностей для вектора эндогенных переменных x_t , которое, очевидно, является функцией значений вектора предопределенных переменных z_t .

Определение 2. Параметр δ называется идентифицируемым в структуре S^0 , для которой $\delta = \delta^0$, если $\delta = \delta^0$ во всех структурах S , эквивалентных S^0 .

Определение 3. Структурное уравнение является идентифицируемым в частной структуре S^0 , если все его коэффициенты идентифицируемы в этой структуре.

Предложение 1 можно теперь сформулировать заново, как предложение о том, что приведенная форма всегда идентифицируема.

Предложение 1. Если удовлетворяются гипотезы 2 и 3, все параметры любой структуры приведенной формы идентифицируемы.

Действительно, согласно предложению 1 две структуры приведенной формы могут быть эквивалентными, только если они идентичны.

Но между структурами приведенной формы и распределениями эндогенных переменных существует взаимно однозначная связь. Поэтому в структурной форме структура будет идентифицируемой в том и только в том случае, если никакая другая структура не имеет той же приведенной формы. Чтобы сформулировать это свойство более точно, обозначим через P матрицу порядка $(n + m) \times n$, объединяющую элементы матриц B и C , т. е. $P = [B \ C]$, или, если модель содержит тождества, матрицу порядка $(n + n' + m) \times (n + n')$ всех коэффициентов модели, т. е. $P = [\bar{B} \ \bar{C}]$.

Теперь можно установить:

Предложение 2. Если удовлетворяются гипотезы 2 и 3, структура S структурной формы будет эквивалентна другой структуре

S^0 в том и только в том случае, если существует квадратная невырожденная матрица D , такая, что $P = DP^0$, и η_t имеет то же распределение, что и $D\eta_t^0$ (или, если в модели имеются тождества, $\bar{\eta}_t$ имеет то же распределение, что и $D\bar{\eta}_t^0$).

Предположим, что, если заданы две структуры S и S^0 , такая матрица D существует. Докажем, что S и S^0 эквивалентны, т. е. что они обуславливают одно и то же распределение x_t . Исходя из предложения 1 достаточно доказать, что они имеют одну и ту же приведенную форму. Если модель не содержит тождества, это вытекает непосредственно из того, что $B = DB^0$ и $C = DC^0$, так как

$$A = -B^{-1}C = -(B^0)^{-1}D^{-1}DC^0 = -(B^0)^{-1}C^0 = A^0$$

и, кроме того,

$$\varepsilon_t = B^{-1}\eta_t = (B^0)^{-1}D^{-1}\eta_t,$$

имеет то же распределение, что и

$$(B^0)^{-1}D^{-1}D\eta_t^0 = (B^0)^{-1}\eta_t^0 = \varepsilon_t^0.$$

То же доказательство можно применить и к моделям, содержащим тождества. Достаточно заменить в нем B , C и η_t на \bar{B} , \bar{C} и $\bar{\eta}_t$. Затем можно показать, что две структуры имеют одну и ту же расширенную приведенную форму, а следовательно, одну и ту же приведенную форму.

Наоборот, предположим, что S и S^0 обладают одной и той же приведенной формой, т. е. $A = A^0$, и что ε_t имеет то же распределение, что и ε_t^0 (если модель содержит тождества, согласно уравнениям (10) $H = H^0$ и χ_t имеет то же распределение, что и χ_t^0). Положим $D = B(B^0)^{-1}$, что предполагает $B = DB^0$. В этом случае равенство $A = A^0$ можно также записать в виде $B^{-1}C = (B^0)^{-1}C^0$ или $C = DC^0$. Кроме того, $\varepsilon_t = B^{-1}\eta_t$ и $\varepsilon_t^0 = (B^0)^{-1}\eta_t^0$ распределены одинаково; следовательно, η_t имеет то же распределение, что и $B(B^0)^{-1}\eta_t^0 = D\eta_t^0$. Таким образом, матрица D соответствует условиям предложения 2. (Если модель содержит тождества, те же рассуждения используются применительно к расширенной приведенной форме.)

В последующих параграфах мы изучим возможность идентификации структурной формы при некоторых типах априорных ограничений. Одновременно можно исследовать другой вопрос, важность которого была показана на примерах предыдущих глав, — проблему существования априорных ограничений для приведенной формы.

Действительно, модель вначале предлагается в структурной форме. Экономические гипотезы выражаются, естественно, в ограничениях на различные структурные уравнения, отражающие основные законы изучаемого явления. Приведенная форма определяется только с целью использования или оценки модели. Как уже было показано, наличие ограничений для структурной формы не всегда предполагает существование ограничений для приведенной формы. Процесс получения оценки был бы особенно прост, если приведенная форма удовлетворяла бы только общей стохастической гипотезе.

В зависимости от того, существуют или нет априорные ограничения для приведенной формы, будем говорить, что модель является переопределенной («сверхидентифицированной») или «простой». Поскольку ограничения для приведенной формы могут вытекать только из ограничений на структурную форму, можно сформулировать следующее определение:

О п р е д е л е н и е 4. Модель является простой в том и только в том случае, если почти всякой матрице A порядка $(n \times m)$ и почти всякому случайному вектору ε_t , удовлетворяющим общей стохастической гипотезе, она ставит в соответствие квадратную невырожденную матрицу B порядка n , матрицу C порядка $(n \times m)$ и случайный вектор η_t , удовлетворяющие априорным ограничениям, общей стохастической гипотезе и соотношениям:

$$C = -BA; \quad \eta_t = B\varepsilon_t. \quad (13)$$

Это определение содержит оговорку, происхождение которой легко понять. Существование матриц B и C и вектора η_t требуется не для всех матриц A и векторов ε_t , но лишь для почти всех этих матриц и почти всех этих векторов. В ином случае мы бы вообще не смогли найти простой модели.

Действительно, рассмотрим модель:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \gamma_2 z_t + \eta_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и допустим, что для η_t не существует никаких априорных ограничений. Приведенная форма модели имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= a_1 z_t + \varepsilon_{1t}, \\ x_{2t} &= a_2 z_t + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Первую систему из отношений (13) здесь можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -a_1 + a_2 \beta_{12}, \\ -\gamma_2 &= -a_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом, она сводится к двум линейным уравнениям, которые позволяют рассчитать β_{12} и γ_2 через a_1 и a_2 . Вполне можно сказать, что модель является простой. Тем не менее, если $a_2 = 0$ и $a_1 \neq 0$, первое уравнение никогда не будет удовлетворяться. Чтобы не приписывать этому исключительному случаю большее значение, чем он в действительности имеет, предпочтительнее исключить его, довольствуясь замечанием, что систему (16) можно решить для «почти всех» значений пары (a_1, a_2) .

Рассмотрим также модель:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \gamma_2 z_t + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и предположим, что вектор η_t подчиняется единственному априорному ограничению $E(\eta_{1t}\eta_{2t}) = 0$. В предыдущей главе (§ 2) было показано, что отношения между структурной и приведенной формами сводятся в этом случае к системе:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -a_1 + a_2 \beta_{12}, \\ -\gamma_2 &= a_1 \beta_{21} - a_2, \\ \beta_{21} E(\varepsilon_{1t}^2) - (1 + \beta_{12} \beta_{21}) E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t}) + \beta_{12} E(\varepsilon_{2t}^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Можно сказать, что модель является простой, так как вышеприведенная система решается относительно β_{12} , β_{21} и γ_2 . Из первого уравнения находим β_{12} , из третьего — β_{21} , из второго — γ_2 . Однако решить систему будет невозможно, если $a_2 = 0$ и $a_1 \neq 0$ либо если $a_2 E(\varepsilon_{1t}^2) = = a_1 E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t})$. Здесь также предпочтительнее устранить эти исключительные случаи и удовлетвориться замечанием, что система (18) имеет решение для «почти всех» значений пары (a_1, a_2) и «почти всех» случайных векторов ε_t .

Для полной строгости изложения следовало бы определить, что понимается под выражением «почти все». Мы не будем пытаться сделать это для общего случая. Здесь достаточно рассмотреть условия, когда ограничения для структурной формы относятся только к B , C и Σ ; другие характеристики распределения η_t не подвергаются никакой особенной априорной спецификации. В этом случае для приведенной формы могут существовать только ограничения на A и Ω . Достаточно убедиться, что структурные параметры можно определить для почти всех значений пары (A, Ω) , т. е. для всех значений за исключением тех, которые принадлежат множеству с нулевой мерой Лебега в той области пространства размерности $(1/2) n \times (2m + n + 1)$, к которой принадлежит эта пара.

Определение 4 можно использовать также в том случае, когда модель содержит тождества. Может показаться, что его трудно применить вследствие того, что ограничения относятся обычно к матрице B_1 , B_2 и C_1 , а не к B и C . Но уравнения (10) с каждой матрицей A и с каждым случайным вектором ε_t связывают матрицу H и вектор χ_t . Вместо того, чтобы искать матрицы B , C и случайный вектор η_t , удовлетворяющие условиям (13), можно искать матрицы B_1 , B_2 , C_1 и случайный вектор η_t , удовлетворяющие следующим априорным ограничениям:

$$C_1 = -B_1 A - B_2 H; \quad \eta_t = B_1 \varepsilon_t + B_2 \chi_t. \quad (19)$$

Свойства H и χ_t обуславливают эквивалентность уравнений (19) уравнениям:

$$\begin{aligned} C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2 &= -(B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3) A; \\ \eta_t &= (B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3) \varepsilon_t, \end{aligned}$$

которые, учитывая (5), строго идентичны уравнениям (13).

4. Случай, когда ограничения не относятся к ошибкам

Теперь перейдем к изучению практически наиболее важного случая, когда имеются априорные ограничения для элементов B и C , но нет априорных ограничений для ошибок η_t . Чаще всего эконометрист не имеет никаких оснований для принятия достаточно специфических гипотез относительно распределения случайных членов. Но иногда он может постулировать независимость ошибок двух различных уравнений; это относится прежде всего к случаю, когда эти уравнения описывают разные явления, для которых случайные члены, по всей видимости, имеют совершенно различное происхождение. Мы не будем специально рассматривать этот случай, изученный, в частности, Ф. Фишером [95] (см. также работу Л. Верге [317], который предложил применимый к данному случаю общий критерий).

Если нет ограничений на распределение ошибок η_t , условие предложения 2 можно выразить более просто. Итак, сформулируем:

Гипотеза 4. Распределение η_t совершенно неизвестно, за исключением его моментов первого порядка, равных нулю.

Предложение 3. При соблюдении гипотез 1, 2, 3 и 4 структурный коэффициент β_{ih} (или γ_{ij}) идентифицируем в структуре S^0 в том и только в том случае, если $\beta_{ih} = \beta_{ih}^0$ (или $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0$) во всех матрицах $P = DP^0$, удовлетворяющих априорным ограничениям и правилу нормализации (причем D является произвольной квадратной матрицей).

Для доказательства прямого свойства предположим, что $\beta_{ih} = \beta_{ih}^0$ во всех матрицах $P = DP^0$, удовлетворяющих априорным ограничениям и правилу нормализации. Рассмотрим структуру S , эквивалентную S^0 . В силу предложения 2 существует матрица D , такая, что $P = DP^0$. Это предполагает $\beta_{ih} = \beta_{ih}^0$, поскольку P матрица коэффициентов структуры S с необходимостью удовлетворяет априорным ограничениям и правилу нормализации. Таким образом, коэффициент β_{ih} является идентифицируемым в S^0 .

Предположим, наоборот, что β_{ih} идентифицируем в S^0 , и допустим, что существует матрица D , такая, что $P = DP^0$ удовлетворяет априорным ограничениям и правилу нормализации, но имеет элемент β_{ih} , отличный от β_{ih}^0 . Для доказательства предположения достаточно найти структуру S , эквивалентную S^0 и содержащую P в качестве матрицы коэффициентов, так как это противоречит предполагаемой идентифицируемости β_{ih} . Рассмотрим, таким образом, структуру, определяемую P и случайным вектором $D\eta_t^0$. Очевидно, она эквивалентна S^0 по крайней мере в том случае, если она принадлежит модели. Если в модели нет тождеств, то она является структурой модели, поскольку вектор $\eta_t = \eta_t$ не подчинен никаким ограничениям (гипотеза 4). Для окончания доказательства необходимо убедиться в том, что, если модель содержит тождества, все n' последних компонент случайного вектора $D\eta_t^0$ равны нулю. Это не составляет затруднений.

Запишем:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix},$$

откуда

$$D\bar{\eta}_t^0 = \begin{bmatrix} D_1 \eta_t^0 \\ D_3 \eta_t^0 \end{bmatrix}.$$

Надо доказать, что $D_3 \eta_t^0 = 0$. Но $P = DP^0$ и P^0 содержат в нижней части деления на блоки (6) известные матрицы B_3 , B_4 и C_2 .

$$\left. \begin{aligned} D_3 B_1^0 + D_4 B_3 &= B_3, \\ D_3 B_2^0 + D_4 B_4 &= B_4, \\ D_3 C_1^0 + D_4 C_2 &= C_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Но $\eta_t^0 = B_1^0 x_t + B_2^0 q_t + C_1^0 z_t$. Таким образом, учитывая систему (20), можно записать:

$$D_3 \eta_t^0 = (I - D_4) (B_3 x_t + B_4 q_t + C_2 z_t).$$

Поскольку модель содержит тождества, выражение во второй скобке равно нулю. На этом доказательство предложения 3 заканчивается.

Если ограничения относятся только к матрице коэффициентов P , предложение 3 определяет идентифицируемость отдельного параметра. Аналогичный вывод можно сделать относительно переопределения (сверхидентификации) модели.

Предложение 4. При соблюдении гипотезы 4 модель является простой в том и только том случае, если всякой матрице A , за исключением, может быть, множества матриц с нулевой мерой Лебега в R^{nm} , она ставит в соответствие квадратную невырожденную матрицу D порядка $n + n'$, такую, что $D[I - \bar{A}]$ удовлетворяет априорным ограничениям (\bar{A} определяется на основе A с помощью уравнений (10) и (11)).

Действительно, предположим, сначала, что модель является простой. Определение 4 предполагает, что почти с каждой A (и ε_t) можно связать невырожденную матрицу B , такую, что $[B - BA]$ будет удовлетворять априорным ограничениям. Определение можно использовать также в случае, когда модель содержит тождества (см. конец § 3); в этом случае его можно интерпретировать как утверждение, что с A можно связать матрицы B_1 , и B_2 , а следовательно, матрицу \bar{B} , такие, что $[\bar{B} - \bar{B}\bar{A}]$ будет удовлетворять априорным ограничениям. Таким образом, матрицей D будет B или \bar{B} , и условие предложения 4 удовлетворяется.

Наоборот, если это условие удовлетворяется, рассмотрим произвольную матрицу A и произвольный случайный вектор ε_t с нулевым математическим ожиданием. В этом случае существование матрицы D , такой, что $D[I - \bar{A}]$ будет удовлетворять ограничениям, предполагает существование соответствующих матриц B и C , которые также будут удовлетворять ограничениям и будут связаны с A через соотношение $C + BA = 0$. Вектор $B\varepsilon_t$ является допустимым вектором η_t , поскольку последний не подчиняется каким-либо ограничениям (гипотеза 4). Таким образом, модель является простой.

5. Линейные ограничения на коэффициенты одного и того же уравнения. Критерий идентифицируемости

Судим еще больше тип рассматриваемых априорных ограничений и предположим, что каждое из них обуславливает равенство нулю линейной однородной формы коэффициентов одного и того же уравнения. Эти ограничения уже давно являются на практике самыми распространенными, и проблему можно изложить приблизительно следующим образом.

Эконометрист вводит несколько структурных уравнений, отражающих каждый определенный экономический закон для объяснения значений, принимаемых n эндогенными переменными. Таким образом, в модель вводится в целом m предопределенных переменных. Однако он знает, что некоторые из эндогенных и предопределенных переменных не должны включаться в то или иное структурное соотношение. Соответствующие элементы матриц B и C должны быть равны нулю.

В положении такого рода каждое ограничение предусматривает равенство нулю отдельного коэффициента (β_{ih} или γ_{ij}). В этом случае можно говорить об *ограничении исключения*. Обобщая, можно сказать, что если p_i обозначает вектор коэффициентов i -го структурного уравнения, т. е. вектор из элементов i -й строки матрицы P , будем предполагать, что каждое ограничение обуславливает равенство нулю определенной линейной однородной формы компонент некоторого p_i .

Гипотеза 5. Каждое ограничение для структурной формы выражается в линейном однородном отношении коэффициентов одного и того же уравнения. Ограничение h для i -го уравнения будет записано в виде:

$$\varphi'_{ih} p_i = 0, \quad (21)$$

где φ_{ih} — вектор из $n + n' + m$ компонент.

Заметим, что гипотеза 5 предполагает справедливость гипотезы 4, поскольку в ней утверждается, что на случайные члены ограничений не существует.

В исключающем ограничении все компоненты вектора φ_{ih} будут равны нулю, за исключением компоненты, соответствующей коэффициенту, к которому относится ограничение. Так, например, модель (14) содержит два ограничения по одному для каждого структурного уравнения. Соответствующие векторы φ_{11} и φ_{21} имеют вид:

$$\varphi_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы одновременно отобразить совокупность ограничений на i -е структурное уравнение, достаточно рассмотреть матрицу Φ_i , столбцами которой являются относящиеся к этому уравнению векторы φ_{ih} (если для уравнения i имеется μ_i ограничений, Φ_i будет иметь $n + n' + m$ строк и μ_i столбцов). В этом случае непосредственно имеем:

$$\Phi'_i p_i = 0. \quad (22)$$

Например, в модели:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \gamma_{23} z_{3t} + \gamma_{24} z_{4t} + \eta_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

матрица ограничений для первого уравнения будет иметь вид:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если модель содержит тождества, ограничения для чисто структурных уравнений можно выразить либо относительно исходной формы модели, либо относительно формы, полученной после исключения тождеств. Отношение (5) между этими двумя формами показывает, что векторы p_i связаны друг с другом известным линейным преобразованием — коэффициенты i -го уравнения производной формы являются линейными однородными функциями вектора коэффициентов i -го уравнения исходной формы. Следовательно, если гипотеза 5 верифицируема для одной из форм, то она верифицируема и для другой. Но в больших моделях ограничения для первоначальной формы обычно бывают более простыми, чем ограничения для производной формы.

В качестве примера, используемого в дальнейшем, рассмотрим следующую систему, которую можно считать отражением очень упрощенного варианта модели мультипликатора-акселератора:

$$\left. \begin{aligned} C_t &= aR_t + bC_{t-1} + c + \eta_{1t}, \\ I_t &= e(R_t - R_{t-1}) + f + \eta_{2t}, \\ C_t + I_t &= R_t. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Она включает три эндогенные переменные (потребление C_t , капиталовложения I_t , доход R_t) и три предопределенные переменные (C_{t-1} , R_{t-1} и вспомогательную постоянную). Исключение I_t приводит к системе:

$$\left. \begin{aligned} C_t - aR_t &= bC_{t-1} + c + \eta_{1t}, \\ -C_t + (1-e)R_t &= -eR_{t-1} + f + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Если переменные расположены в принятом выше порядке, ограничения для первоначальной формы задаются двумя матрицами:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

После исключения I_i ограничения задаются матрицами:

$$\Phi_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно доказать основное положение относительно идентифицируемости моделей из систем уравнений.

Т е о р е м а 1. Пусть имеется модель, удовлетворяющая гипотезам 1, 2, 3 и 5. В структуре с матрицей коэффициентов P^0 i -е уравнение будет идентифицируемым в том и только в том случае, если матрица $P^0\Phi_i$ имеет ранг $n + n' - 1$.

Матрица $P^0\Phi_i$ имеет $n + n'$ строк и μ_i столбцов. Ее i -я строка равна $(p_i^0)'\Phi_i$. В силу (22) она содержит только нули. Таким образом, ранг $P^0\Phi_i$ в максимальном случае равен $n + n' - 1$.

Предположим, что матрица $P^0\Phi_i$ имеет ранг $n + n' - 1$. Пусть структура $^1P^1 = DP^0$ эквивалентна структуре P^0 . Поскольку P^1 удовлетворяет априорным ограничениям, можно, в частности, записать:

$$(P^0\Phi_i)'d_i = \Phi_i'p_i^1 = 0, \quad (28)$$

где d_i — вектор элементов i -й строки матрицы D . Так как $P^0\Phi_i$ имеет ранг $n + n' - 1$, все векторы d_i , удовлетворяющие (28), будут коллинеарными. Согласно гипотезе эта система верифицируема, если D — единичная матрица. Таким образом, все компоненты вектора d_i , за исключением i -й, будут равны нулю. При таких условиях $(p_i^{(1)})' = d_i'P^0$ будет пропорционально $(p_i^0)'$. Но поскольку как P^0 , так и P^1 удовлетворяют правилу нормализации, p_i^1 будет равно p_i^0 . Таким образом, i -е уравнение будет идентифицируемым.

Предположим, наоборот, что это уравнение идентифицируемо. Матрица $P^0\Phi_i$ необходимо имеет ранг $n + n' - 1$. Если бы она имела меньший ранг, можно было бы найти вектор d_i , являющийся решением системы (28) и не коллинеарный по отношению к вектору e_i , все компоненты которого, кроме i -й (равной 1), равны нулю. Следовательно, $\lambda d_i - e_i$ было бы не равно нулю, каким бы ни было число λ . Пусть D будет матрицей, i -я строка которой составлена из элементов d_i , а остальные строки такие же, как у единичной матрицы. Матрица DP^0 будет в этом случае удовлетворять всем априорным ограничениям. Но ее i -я строка не будет пропорциональна i -й строке P^0 , так как $p_i^1 = \lambda p_i^0$ предполагает

$$(P^0)'(\lambda d_i - e_i) = 0,$$

что невозможно, поскольку матрица \bar{B}^0 невырождена и P^0 имеет ранг $n + n'$. Таким образом, i -е уравнение не будет идентифицируемым.

¹ Для упрощения изложения мы будем придавать тождественный смысл структуре и ее матрице коэффициентов. Было бы однообразно повторять каждый раз «структура с матрицей коэффициентов...».

Применение критерия, определяемого теоремой 1, не занимает много времени. Для модели (23), например, обе матрицы $P^0\Phi_1$ и $P^0\Phi_2$ имеют вид:

$$P^0\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma_{23}^0 & -\gamma_{24}^0 \end{bmatrix}, \quad P^0\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В общем случае эти матрицы имеют ранг 1 и оба уравнения являются идентифицируемыми. Однако в случае, если $\gamma_{23}^0 = \gamma_{24}^0 = 0$, первое уравнение будет неидентифицируемым, поскольку ранг $P^0\Phi_1$ равен нулю. Заметим, что модель, большинство структур которой идентифицируемо, может содержать и некоторые особые неидентифицируемые структуры.

Можно убедиться, что, если модель содержит тождества, критерий даст одинаковый ответ, независимо от того, будет ли он применен к первоначальной или производной форме. Рассмотрим, например, второе уравнение моделей (24) и (25). Критерий приводит к изучению соответственно двух матриц:

$$P^0\Phi_2 = \begin{bmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^0\Phi_2^* = \begin{bmatrix} a-1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$P^0\Phi_2$ имеет ранг $2(n + n' = 3)$ и $P^0\Phi_2^*$ имеет ранг $1(n + n' = 2)$, за исключением случая, когда одновременно $a = 1$ и $b = 0$. Второе уравнение идентифицируемо во всех структурах, в которых не встречается этот частный случай.

Если все ограничения предусматривают равенство нулю некоторых коэффициентов, матрицы $P\Phi_i$ можно получить очень быстро. Матрица, относящаяся к i -му уравнению, будет получена из тех столбцов матрицы P , для которых элемент i -й строки должен быть равен 0.

Рассмотрим, например, модель из трех эндогенных и двух экзогенных переменных, в которой матрица P , подчиняющаяся априорным ограничениям и правилу нормализации, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{12} \\ \beta_{21} & 1 & 0 & \gamma_{21} & 0 \\ \beta_{31} & 0 & 1 & 0 & \gamma_{32} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Сразу видно, что эта модель является переопределенной, так как для первого уравнения имеются три ограничения (см. ниже, § 6).

Для соответствующих ограничений матриц P матрицы $P\Phi_1$, $P\Phi_2$ и $P\Phi_3$ имеют вид:

$$P\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma_{21} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & 0 \\ 1 & \gamma_{32} \end{bmatrix}, \quad P\Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \gamma_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$P\Phi_1$ имеет ранг 2 для всех структур; первое структурное уравнение всегда идентифицируемо. $P\Phi_2$ имеет ранг 2, за исключением случая,

когда $\gamma_{12} = 0$; второе уравнение идентифицируемо, за исключением тех структур, которые придают γ_{12} значение 0. Наконец, $P\Phi_3$ имеет ранг 1; третье уравнение всегда неидентифицируемо.

Хотя *правило ранга*, которым мы пользовались выше, позволяет быстро получить необходимый вывод, можно рассмотреть и более простое *правило порядка*. Как уже было показано, матрица Φ_i имеет столько столбцов, сколько существует ограничений для i -го уравнения (т. е. μ_i). Матрица $P^0\Phi_i$ имеет такое же число столбцов. Чтобы ее ранг был равен $n + n' - 1$, необходимо, чтобы μ_i было не меньше $n + n' - 1$. Правило порядка устанавливает следующий факт: для идентифицируемости уравнения необходимо, чтобы его коэффициенты подчинялись по меньшей мере $n + n' - 1$ априорным ограничениям. Очевидно, это условие не является достаточным.

6. Критерий переопределения (сверхидентификации)

Рассмотрим теперь критерий, позволяющий определить, является модель переопределенной или простой. Воспользуемся для этого новой гипотезой.

Гипотеза 6. Почти для всякой матрицы P , удовлетворяющей определяемым гипотезой 5 ограничениям, не существует никакой ненулевой линейной комбинации $n + n' - 1$ строк, которая бы удовлетворяла ограничениям, налагаемым на оставшуюся строку.

Эта гипотеза обуславливает определенную форму независимости друг от друга ограничений на различные уравнения¹. Смысл, приписываемый выражению «почти всякой», ясен. В пространстве $n(n + n' + m)$ измерений удовлетворяющие априорным ограничениям матрицы P составляют линейное подпространство. Выражение «почти всякая» относится к мере Лебега относительно этого линейного подпространства.

Докажем следующее предложение.

¹ Вот пример, когда гипотеза 6 не удовлетворяется:

$$\begin{cases} x_{1t} = \beta_{12} x_{2t} + \gamma_1 z_{3t} - \gamma_1 z_{4t} + \eta_{1t}, \\ x_{2t} = \beta_{21} x_{1t} + \gamma_2 z_{3t} - \gamma_2 z_{4t} + \eta_{2t}. \end{cases}$$

Здесь ограничения предусматривают, что коэффициенты при z_{3t} и z_{4t} должны быть противоположными по знаку как в первом уравнении, так и во втором. Модель является переопределенной, так как в приведенной форме:

$$\begin{cases} x_{1t} = a_{13} z_{3t} + a_{14} z_{4t} + e_{1t}, \\ x_{2t} = a_{23} z_{3t} + a_{24} z_{4t} + e_{2t}, \end{cases}$$

коэффициенты при z_{3t} и z_{4t} также должны быть противоположными по знаку.

С помощью этого примера можно понять, почему в определении сверхидентифицированных моделей необходимо предполагать, что матрица B невырождена. Действительно, в этом примере, даже если пренебречь ограничением для приведенной формы, почти всегда можно найти такую линейную комбинацию двух ее уравнений, что коэффициенты при z_{3t} и z_{4t} будут противоположными. Эту линейную комбинацию можно принять одновременно для первого и второго структурных уравнений. Но матрица будет вырожденной и полученная таким образом «структурная форма» не позволит полностью определить эндогенные переменные через экзогенные.

Предложение 5. Модель, удовлетворяющая гипотезе 5, является переопределенной, если существует по меньшей мере одно чисто структурное уравнение i ($i = 1, 2, \dots, n$) и матрицы B_1, B_2, C_1 размерности $(n \times n)$, $(n \times n')$, $(n \times m)$, не обязательно удовлетворяющие априорным ограничениям, и если $P\Phi_i$ имеет ранг $n + n'$, когда P состоит из трех упомянутых матриц и известных матриц B_3, B_4, C_2 . Кроме того, если подтверждается гипотеза 6, обратное положение будет также справедливым.

Достаточно установить справедливость нижеприводимых предложений 1 и 2.

1) Если модель является простой, максимальный ранг $P\Phi_i$ равен $n + n' - 1$ для любых матриц B_1, B_2, C_1 (в данном случае они могут не удовлетворять априорным ограничениям).

Действительно, запишем P в форме $[\bar{B}\bar{C}]$ и предположим сначала, что \bar{B} — невырожденная матрица. Матрицу $-\bar{B}^{-1}\bar{C}$ можно рассматривать как матрицу расширенной приведенной формы. Чтобы это показать, положим $-\bar{B}^{-1}\bar{C} = \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix}$. Условие $\bar{B} \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix} + \bar{C} = 0$ предполагает, в частности, $B_3A + B_4H + C_2 = 0$. Следовательно, H можно рассчитать, как это и должно быть, на основе B с помощью формулы (10). Но поскольку модель является простой, можно найти, за исключением, может быть, матриц $-\bar{B}^{-1}\bar{C}$, образующих множество с нулевой мерой, невырожденную матрицу D , такую, что матрица

$$D [I \quad \bar{B}^{-1}\bar{C}] = D\bar{B}^{-1}P$$

будет удовлетворять ограничениям. Пусть в этом случае g'_i вектор с $n + n'$ компонентами, соответствующий i -й строке $D\bar{B}^{-1}$. В силу априорных ограничений

$$g'_i P\Phi_i = 0. \quad (30)$$

Поскольку матрица $D\bar{B}^{-1}$ невырождена, вектор g'_i также не равен тождественно нулю. Равенство (30) предполагает, что максимальный ранг матрицы $P\Phi_i$ равен $n + n' - 1$.

Остается рассмотреть два частных случая, которые до сих пор обходились: 1) когда матрица \bar{B} вырождена, 2) когда матрица $\bar{B}^{-1}\bar{C}$ принадлежит множеству с нулевой мерой, с которым не может быть связана никакая невырожденная матрица D . Соответствующие матрицы P образуют в пространстве $n(n + n' + m)$ измерений множество E с нулевой мерой. Но определители матриц $P\Phi_i$ являются непрерывными функциями P . Они равны нулю в E , если они равны нулю во всем остальном пространстве. В этом случае ранг $P\Phi_i$ также не может превышать $n + n' - 1$.

2) Если максимальный ранг $P\Phi_i$ равен $n + n' - 1$ для любого P и любого i , модель является простой. Действительно, пусть имеется матрица A порядка nm и соответствующая матрица P . Так как ранг матрицы $P\Phi_i$ меньше $n + n'$, существует ненулевой вектор d_i , такой, что

$$d'_i P\Phi_i = 0. \quad (31)$$

Рассмотрим матрицу D , строками которой являются n векторов d' и n' векторов e'_i . Матрица DP удовлетворяет априорным ограничениям. Для доказательства того, что модель является простой, достаточно установить невырожденность D , за исключением случая, когда она соответствует множеству матриц A с нулевой мерой. Будем исходить от противного; допустим, что существует множество матриц A с ненулевой мерой такое, что все соответствующие матрицы DP , удовлетворяющие ограничениям, будут построены с помощью вырожденных матриц D . Максимальный ранг матриц DP будет равен $n + n' - 1$. По меньшей мере одну из их строк можно получить как линейную комбинацию остальных строк. Они составляют множество с ненулевой мерой в множестве удовлетворяющих ограничениям матриц P . Их существование будет противоречить гипотезе 2.

Используя *правило порядка*, можно дать более простую формулировку предложения 5. Достаточно сделать явным совершенно естественное условие, согласно которому μ_i ограничений для i -го уравнения линейно независимы. Матрица Φ_i в этом случае имеет ранг μ_i . Так как B_4 — невырожденная матрица, P имеет ранг $n + n'$, если только B_1 также невырожденна. Последнее всегда можно предположить, поскольку, согласно предложению 5, мы свободны при ее выборе. Ранг $P\Phi_i$ в этом случае равен наименьшему из двух чисел, $n + n'$ и μ_i .

Таким образом, можно сформулировать следующие гипотезу и теорему.

Г и п о т е з а 7. Каждая матрица Φ_i имеет ранг μ_i , равный числу ограничений для i -го уравнения ($i = 1, 2, \dots, n$).

Т е о р е м а 2. Модель, удовлетворяющая гипотезам 5 и 7, будет переопределенной, если для какого-нибудь из n чисто структурных уравнений будет существовать более $n + n' - 1$ ограничений. Кроме того, если подтверждается гипотеза 6, обратный вывод также будет справедлив.

Теорема 1 указывает, что для идентифицируемости определенной структуры ограничения должны быть достаточно многочисленными. Теорема 2 показывает, что при слишком многочисленных ограничениях модель будет переопределенной. Так объясняется принятая терминология. Однако она может ввести в заблуждение, поскольку существуют переопределенные модели, ни одна из структур которых не является идентифицируемой. Примером может служить модель с матрицей (29): ее третье уравнение не идентифицируемо и сама модель переопределена из-за ограничений на первое уравнение. Тем более следует избегать выражения «строго идентифицируемые модели», часто употребляемого для обозначения моделей, называемых простыми.

Однако, когда все ограничения имеют форму, специфицированную гипотезой 5, используемая терминология оправдана в случае ее применения к отдельному уравнению и добавления следующего определения.

О п р е д е л е н и е 5. i -е структурное уравнение называется переопределенным, если при отсутствии ограничений на другие структурные уравнения модель в целом будет переопределенной.

Если пренебречь ограничениями для всех уравнений кроме i -го, гипотеза 6 не будет необходимой для предложения 5 и теоремы 2, так как в доказательстве 2 в качестве D всегда можно выбрать невырожденную матрицу. Теоремы 1 и 2 в этом случае предполагают следующее.

Если $\mu_i < n + n' - 1$, i -е уравнение не будет ни идентифицированным, ни сверхидентифицированным; часто говорят, что оно является «неидентифицированным».

Если $\mu_i > n + n' - 1$, i -е уравнение является сверхидентифицированным. Оно является также идентифицируемым почти во всех структурах, поскольку, если пренебречь ограничениями для других уравнений, $P\Phi_i$ почти всегда будет иметь ранг $n + n' - 1$.

Если $\mu_i = n + n' - 1$, i -е уравнение не будет сверхидентифицированным. Оно будет идентифицируемым почти во всех структурах. Часто говорят, что оно является «строго идентифицируемым».

7. Обобщения

Вышеприведенная теорема 1 была предложена Т. Купмансом, Х. Рубином и Р. Лейпником [182]. Читатель найдет в их работе обсуждение проблемы идентификации структурных уравнений линейной модели в случае, когда одновременно существуют ограничения для ковариационной матрицы ошибок η_i и линейные однородные ограничения для коэффициентов различных уравнений. Мы здесь ограничимся несколькими разъяснениями относительно обобщений, которые могут быть сделаны на основе теоремы 1. В целях упрощения предположим, что модель не содержит тождеств ($n' = 0$).

1) Рассмотрим сначала случай, когда имеется модель типа (1), в которой принятые ограничения относятся каждое только к коэффициентам одного и того же уравнения, но уже не являются обязательно линейными.

Пусть

$$\varphi_{ih}(p_i) = 0 \quad (32)$$

будет h -м ограничением для вектора p_i коэффициентов i -го уравнения. Ограничения такой формы являются обобщением рассмотренных выше ограничений, представленных условиями (21). Если не используется правило нормализации, характер i -го уравнения не изменится при умножении всех его коэффициентов на одно и то же число. Таким образом, функция φ_{ih} должна быть однородной. Допустим также, что она имеет первые производные по всем своим аргументам.

Если задана идентифицируемая структура P^0 , представляется естественным рассмотреть ограниченное разложение φ_{ih} в окрестностях p_i^0 . Пусть Φ_{ijh}^0 — значение p_i^0 производной φ_{ih} по p_{ij} :

$$\Phi_{ijh}^0 = \frac{\partial \varphi_{ih}}{\partial p_{ij}}(p_i^0).$$

В окрестностях p_i^0 ограничение (32) можно заменить на

$$p_i' \Phi_i^0 = 0, \quad (33)$$

где Φ_i^0 — матрица с элементами Φ_{ijh}^0 . Действительно, $\varphi_{ih}(p_i^0) = 0$, поскольку p_i^0 удовлетворяет ограничениям; $(p_i^0)' \Phi_i^0 = 0$, так как φ_{ih} является однородной.

Таким образом, представляется, что для структур в окрестностях P^0 проблему вполне можно свести к уже изученному случаю линейных однородных ограничений. Это замечание оправдывает определение *локальной идентифицируемости*.

Структурный параметр β_{ik}^0 (или γ_{ij}^0) структуры, содержащей матрицу P^0 , является локально идентифицируемым, если существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\beta_{ik}^1 = \beta_{ik}^0 \quad (\text{или } \gamma_{ij}^1 = \gamma_{ij}^0)$$

во всех матрицах P^1 , эквивалентных P^0 , и таких, что $\|P^1 - P^0\| < \delta$. Расстояние $\|P^1 - P^0\|$ является здесь, например, евклидовым расстоянием в пространстве $n(n+m)$ измерений.

Проблема идентификации в рассматриваемых здесь ситуациях была изучена Ф. Фишером [92]. В числе других результатов, он доказал следующее обобщение достаточного условия теоремы 1.

В структуре с матрицей коэффициентов P^0 i -е уравнение локально идентифицируемо, если матрица $P^0 \Phi_i^0$ имеет ранг $n - 1$.

Читатель найдет в статье Фишера перечисление необходимых условий локальной идентифицируемости и достаточных условий для простой или полной идентифицируемости определенной структуры¹.

Это исследование было обобщено в [317] для гораздо более широкого класса ограничений — ограничений, предусматривающих равенство нулю некоторых дифференцируемых функций коэффициентов (которые могут быть взяты из различных уравнений) и ковариаций ошибок. Л. Вегге [317] приводит общее необходимое условие ранга для локальной идентифицируемости определенной структуры и показывает, в каких случаях это условие является достаточным.

2) Модель:

$$Bx_t + Cz_t = \eta_t$$

линейна одновременно как по отношению к эндогенным и экзогенным переменным, так и по отношению к оцениваемым параметрам. Очевидно, может возникнуть необходимость рассматривать нелинейные структурные отношения и выяснить вопрос об их идентифицируемости. Ф. Фишер [94] изучил этот вопрос применительно к моделям, линейным по отношению к оцениваемым параметрам, и для случая, когда существуют только линейные однородные ограничения, относящиеся каждое к коэффициентам одного и того же уравнения.

Модель, как и в предыдущем случае, имеет n эндогенных переменных x_{it} и m экзогенных переменных z_{jt} , но она включает p функций q_{kt} от x_{it} и z_{jt} ($k = 1, 2, \dots, p$), т. е.

¹ А. Уолд [310] приводит необходимое и достаточное условие локальной идентифицируемости структурного параметра, когда ограничения обуславливают равенство нулю некоторых дифференцируемых функций коэффициентов модели и ковариаций ошибок, а в остальном являются произвольными (см. теорему 3.3). Но соответствующий критерий вряд ли применим на практике. В частности, он предполагает, что ограничения решены относительно некоторых параметров модели.

$$q_{kt} = f_k(x_{1t}, \dots, x_{nt}; z_{1t}, \dots, z_{mt}). \quad (34)$$

Структурная форма модели имеет вид:

$$Pq_t = \eta_t, \quad (35)$$

где P — матрица коэффициентов из n строк и p столбцов. Априорные ограничения составляют отношения формы (21), соответствующей гипотезе 1.

В качестве примера рассмотрим модель из двух уравнений, содержащих две эндогенных и одну экзогенную переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= \beta_{12} x_{2t} + \gamma_1 z_t + \lambda_1 + \eta_{1t}, \\ x_{2t} &= \beta_{21} x_{1t} + \beta_{23} (x_{1t})^2 + \gamma_2 z_t + \lambda_2 + \eta_{2t}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Первое уравнение линейно, но второе является уравнением второй степени относительно x_{1t} . Форма (35) применяется здесь с вектором q_t и матрицей P , определяемыми из

$$q_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ (x_{1t})^2 \\ x_{2t} \\ z_t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_{12} & -\gamma_1 & -\lambda_1 \\ -\beta_{21} & -\beta_{23} & 1 & -\gamma_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Разумеется, модели этой формы — линейные по отношению к эндогенным переменным — не выдвигают никаких новых проблем, поскольку всегда можно принять определение экзогенных переменных, благодаря которому модель станет полностью линейной. Но этот метод неприменим, если структурные уравнения нелинейны относительно эндогенных переменных.

Ф. Фишеру, в частности, удалось обобщить теорему 1 для моделей такого характера, в которых имеется по крайней мере одна непостоянная экзогенная переменная. Если запись системы удовлетворяет некоторому, практически не очень строгому ограничению, i -е уравнение структуры P^0 будет идентифицируемым в том и только в том случае, если матрица $P^0 \Phi_i$ как в нелинейной, так и в линейной модели имеет ранг $n - 1$ (Ф. Фишер [96] формулирует упомянутое условие).

Так, для модели (36) первое уравнение будет идентифицируемым во всех структурах, в которых $\beta_{23}^0 \neq 0$, поскольку

$$P^0 \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{23}^0 \end{bmatrix}.$$

Если два уравнения отражают соответственно закон предложения и закон спроса, предложение будет идентифицируемым, хотя на него и влияет та же экзогенная переменная, что и на спрос. Нелинейность спроса определенным образом позволяет идентифицировать предложение.

3) Мы говорили только о моделях с ошибками в уравнениях. Проблемы идентификации подобного характера могут возникнуть и в моделях с ошибками в переменных.

В процессе изучения этих моделей в гл. 10 допускалось, что коэффициенты A и b линейных соотношений $Ay_t = b$ не подчинены никаким ограничениям и мы пытались только оценить положение гиперплоскости $Ay_t = b$, довольствуясь одним отображением среди всех эквивалентных. Но для предположения существования m линейных отношений между «истинными переменными» y_{it} необходимо основываться на некотором анализе явлений, который в общем случае приводит к определению характерных свойств каждого из отношений. Как и в моделях с ошибками в уравнениях, мы сможем выяснить, что некоторая переменная не входит в определенное отношение. Кроме того, мы попытаемся оценить не только положение гиперплоскости $Ay_t = b$, но и каждое из соотношений, представляющих собой экономически значимое отображение этой гиперплоскости.

Не будем здесь глубоко исследовать этот вопрос. Многомерные модели с ошибками в переменных мало используются в эконометрии. Достаточно отметить, что к таким моделям применимы результаты, полученные в этой главе.

Например, модель можно определить как «переопределенную» или «простую» в зависимости от того, ограничивают или нет априорные ограничения на A и b положение m -мерной гиперплоскости $Ay_t = b$ в n -мерном пространстве, которому принадлежит y_t . Если почти любое положение этой гиперплоскости допустимо, модель будет простой. Если ограничения удовлетворяют гипотезам 1 и 2 (P обозначает здесь матрицу $[A \ b]$ из m строк и $n+1$ столбца), можно применить теорему 2, и, таким образом, модель будет переопределенной в том и только том случае, если для одного и того же уравнения существует более $m-1$ независимых ограничений.

Рассмотренные в гл. 10 методы оценки нельзя использовать применительно к переопределенным моделям, поскольку они не учитывают существование для плоскости априорных ограничений. Теоретически, если известна ковариационная матрица Ω , оценку по минимальному расстоянию можно определить как для простых, так и для сверхидентифицированных моделей с ошибками в переменных. Но расчеты могут оказаться весьма трудоемкими.

В гл. 10 значительная часть исследования была посвящена идентификации гиперплоскости $Ay_t = b$. Но идентифицируемость этой гиперплоскости не предполагает, что каждое из уравнений ее структурного отображения определяется единственным образом. Чтобы структура с матрицей P^0 была идентифицируемой, необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскость была идентифицируемой и не существовало никакой квадратной матрицы $D \neq I$, такой, что DP^0 удовлетворяло бы как априорным ограничениям, так и правилу нормализации.

Когда априорные ограничения линейны и однородны, и относятся каждое к коэффициентам одного и того же уравнения (гипотеза 1), i -е уравнение структуры P^0 будет идентифицируемым в том и только том случае, если идентифицируема гиперплоскость и матрица $P^0\Phi_i$ имеет ранг $m-1$.

ГЛАВА 19. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ СИСТЕМ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Структурная и приведенная формы

В целях анализа общей проблемы оценки систем уравнений рассмотрим модель со структурной формой:

$$Bx_t + Cz_t = \eta_t \quad (1)$$

и приведенной формой:

$$x_t = Az_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Эта формулировка не учитывает в явном виде случай, когда в модель входят тождества или эндогенные переменные с запаздыванием. В § 2 и 6, 5) мы увидим, каким образом можно изменить формулировки гипотез и свойств для того, чтобы охватить одновременно модели, содержащие тождества или эндогенные переменные с запаздываниями. Мы будем следовать обозначениям (1) и (2) лишь для того, чтобы не сделать изложение слишком тяжелым.

Структурная и приведенная формы связаны друг с другом посредством равенств:

$$BA + C = 0, \quad (3)$$

$$\eta_t = B\varepsilon_t. \quad (4)$$

Если для ошибок η_t нет априорных ограничений, условие $BA + C = 0$ будет единственным, позволяющим идентифицировать структурные уравнения. Прежде чем рассматривать методы оценки в собственном смысле слова, важно изучить связь, которая существует между A и (B, C) в силу равенства $BA + C = 0$, априорных ограничений на B и C и правила нормализации. В частности, следует знать гипотезы, при которых эта связь непрерывна, так что состоятельность оценок приведенной формы обуславливает состоятельность соответствующих оценок структурной формы.

Обозначим через A^0 , B^0 и C^0 истинные значения матриц A , B и C . Будем рассматривать случай, когда истинная структура идентифицируема. Точнее, мы примем в качестве априорных ограничений следующие общие гипотезы.

Гипотеза 1. В евклидовом пространстве $n(n + m)$ измерений априорные ограничения и правило нормализации обуславливают принадлежность (B, C) к компактному множеству (т. е. к ограниченному, замкнутому множеству).

Гипотеза 2. Матрица B^0 невырождена. Никакая пара (B, C) , кроме (B^0, C^0) , не удовлетворяет одновременно априорным ограничениям, правилу нормализации и равенству:

$$BA^0 + C = 0.$$

Гипотеза 2 выражает тот факт, что ограничения для B и C являются достаточными для идентификации структурных уравнений. Кроме того, она предусматривает, что матрица B^0 невырождена, т. е. что модель достаточна для определения закона условной вероятности эндогенных переменных в зависимости от экзогенных переменных.

Если априорные ограничения обуславливают равенство нулю некоторых коэффициентов B и C , правило нормализации можно выбрать так, что гипотеза 1 будет удовлетворяться. Достаточно, например, зафиксировать значение положительно определенной квадратичной формы коэффициентов каждого уравнения и априорно выбрать знак одного из коэффициентов, который не был бы равен нулю в истинной структуре.

Предложение 1. Если удовлетворяются гипотезы 1 и 2, связь, позволяющая определить коэффициенты структурной формы через коэффициенты приведенной формы непрерывна в окрестностях истинной структуры.

Точный смысл и доказательство этого свойства вытекают из следующей леммы.

Лемма. Пусть $y = f(x)$ — отображение одного метрического пространства в другое метрическое пространство, которое определяется в компактном множестве X , непрерывное в x^0 и таково, что $f(x^0) = f(x)$ имеет единственное решение, равное x^0 . Для всякого $\varepsilon > 0$ существует η , такое, что $\|f(x) - f(x^0)\| < \eta$ предполагает $\|x - x^0\| < \varepsilon$ в X .

Действительно, предположим, что существует $\varepsilon > 0$, для которого нельзя найти никакого η , удовлетворяющего изложенному выше условию. С любой последовательностью стремящихся к нулю положительных чисел η_s ($s = 1, 2, \dots, \infty$) можно связать последовательность $\{x_s\}$ из множества X , такую, что

$$\|f(x_s) - f(x^0)\| < \eta^s \quad \text{и} \quad \|x_s - x^0\| \geq \varepsilon.$$

Предельная точка этой последовательности x^∞ должна удовлетворять одновременно условиям $f(x^\infty) = f(x^0)$ и $\|x^\infty - x^0\| \geq \varepsilon$, что противоречит гипотезам леммы.

Для доказательства предложения 1 достаточно применить лемму при $x = (B, C)$, $y = A$. Множество X будет включать в себя все структуры (B, C) , удовлетворяющие априорным ограничениям и правилу нормализации. Наконец, $y = f(x)$ будет функцией $A = -B^{-1}C$, которая непрерывна в (B^0, C^0) , поскольку матрица B^0 невырождена.

Основной интерес представляет следующий вывод из предложения 1. Пусть $\{A_T\}$ — последовательность случайных матриц, удовлетворяющих априорным ограничениям для A и стремящихся по вероятности к A^0 при неограниченном увеличении T . С любой матрицей A_T можно связать две матрицы, B_T и C_T , удовлетворяющие априорным ограничениям, правилу нормализации и равенству:

$$B_T A_T + C_T = 0.$$

Предложение 1 устанавливает, что $\{B_T\}$ и $\{C_T\}$ стремятся по вероятности к B^0 и C^0 (см. предложение 3 из приложения к гл. 9). С состоятельной оценкой A можно, таким образом, связать состоятельные оценки B и C .

Для установления связи между асимптотическими распределениями оценок A , с одной стороны, и оценок B и C — с другой, потребуются более точные гипотезы относительно априорных ограничений. В этом случае правило нормализации и ограничения для B и C отразятся следующими уравнениями:

$$\Psi_r(\beta_{11}, \dots, \beta_{ih}, \dots, \beta_{nn}; \gamma_{11}, \dots, \gamma_{ij}, \dots, \gamma_{nm}) = 0, \quad (5)$$

где r меняется от 1 до q .

Предлагаем следующую гипотезу.

Г и п о т е з а 3. В окрестности (B^0, C^0) отношение между расстояниями

$$\|B^{-1}C - (B^0)^{-1}C^0\| \text{ и } \|(B, C) - (B^0, C^0)\|$$

ограничено снизу положительным числом в множестве пар (B, C) , удовлетворяющих априорным ограничениям и правилу нормализации.

Эта гипотеза усиливает гипотезу 2. Из идентифицируемости (B^0, C^0) известно, что

$$\|B^{-1}C - (B^0)^{-1}C^0\|$$

не равно нулю для любой пары (B, C) , кроме (B^0, C^0) . При этом требуется, чтобы это расстояние не стремилось к нулю быстрее, чем

$$\|(B, C) - (B^0, C^0)\|.$$

Г и п о т е з а 4. В окрестностях (B^0, C^0) функции Ψ_r имеют ограниченные производные до третьего порядка, и матрица

$$[\partial \Psi_r / \partial \beta_{ih}; \partial \Psi_r / \partial \gamma_{ij}]$$

размерности $[q \times n(n + m)]$ имеет ранг q .

Теперь установим следующее.

П р е д л о ж е н и е 2. Если удовлетворяются гипотезы 1, 2, 3 и 4, в окрестностях (A^0, B^0, C^0) существует параметрическое отображение

$$[A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)]$$

матриц, удовлетворяющих априорным ограничениям и правилу нормализации. Вектор параметров α имеет $p = n(n + m) - q$ компонент.

Функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ и $C(\alpha)$ имеют ограниченные производные до третьего порядка. Не существует никакого множества p , не равных одновременно нулю чисел λ_k , таких, что

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial A}{\partial \alpha_k}$$

будет равно нулю в точке α^0 , или таких, что

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} \text{ и } \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}$$

будут одновременно равны нулю в точке α^0 .

В гипотезе 4 принято, что в окрестности (B^0, C^0) существует параметрическое отображение матриц, удовлетворяющих уравнениям (5), $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ (см. работу [66], в частности, теоремы (10.2.2) и (10.2.3)). Вектор α , компоненты которого могут быть выбраны из β_{ih} и γ_{ij} , имеет в этом случае $p = n(n + m) - q$ компонент. Функции $B(\alpha)$ и $C(\alpha)$ имеют ограниченные производные до третьего порядка. Наконец, значение α^0 для α , соответствующего истинной структуре (B^0, C^0) , не является особой точкой отображения, т. е. не существует никакого множества p чисел λ_k , не равных одновременно нулю, таких, что

$$\sum_k \lambda_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} \text{ и } \sum_k \lambda_k \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}$$

будут одновременно равны нулю в точке α^0 .

Согласно гипотезе 2 матрица B^0 невырождена. Таким образом, существует окрестность α^0 , в которой $B(\alpha)$ невырождена, а ее обратная матрица ограничена. Пусть $A(\alpha)$ — матрица

$$-[B(\alpha)]^{-1} C(\alpha).$$

В достаточной окрестности A^0 не существует никаких других удовлетворяющих ограничениям матриц A , кроме имеющих вид $A(\alpha)$. Действительно, любой последовательности стремящихся к A^0 матриц A_T в силу предложения 1, соответствует стремящаяся к (B^0, C^0) последовательность $\{B_T, C_T\}$ и, следовательно, начиная с определенного ранга последовательность $\{\alpha_T\}$, такая, что

$$B_T = B(\alpha_T); \quad C_T = C(\alpha_T),$$

откуда необходимо следует, что $A_T = A(\alpha_T)$.

Функция $A(\alpha)$ в окрестностях α^0 , очевидно, имеет ограниченные производные до третьего порядка. Остается доказать, что α^0 не является особой точкой отображения $A(\alpha)$. Предположим, что существует p не одновременно равных нулю чисел λ_k , таких, что

$$\sum_k \lambda_k \frac{\partial A}{\partial \alpha_k}$$

равно нулю. Рассмотрим в таком случае последовательность векторов $\{\alpha^s\}$, определяемую из $\alpha_k^s = \alpha_k^0 + 2^{-s}\lambda_k$ (для $s = 1, 2, \dots, \infty$). Отношение между

$$\|A(\alpha^s) - A^0\| \text{ и } \|\alpha^s - \alpha^0\|$$

стремится к нулю. В силу гипотезы 3 отношение между

$$\|[B(\alpha^s), C(\alpha^s)] - (B^0, C^0)\| \text{ и } \|\alpha^s - \alpha^0\|$$

также стремится к нулю, откуда следует, что

$$\sum_k \lambda_k \frac{\partial B}{\partial \alpha_k} \text{ и } \sum_k \lambda_k \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}$$

равны нулю, что невозможно, поскольку α^0 не является особой точкой параметрического отображения пар (B, C) .

Предложение 2 представляет интерес в двух отношениях. С одной стороны, оно устанавливает определенную регулярность множества удовлетворяющих априорным ограничениям матриц A . С другой стороны, оно является основой доказательства асимптотической нормальности некоторых оценок B и C . Действительно, пусть $\{A_T\}$ — последовательность случайных матриц, удовлетворяющих априорным ограничениям, и таких, что $\sqrt{T}(A_T - A^0)$ имеет нормальное предельное распределение. Пусть B_T и C_T — матрицы, а α_T — вектор параметров, соответствующих A_T . Ясно, что $\sqrt{T}(\alpha_T - \alpha^0)$ и, следовательно, $\sqrt{T}(B_T - B^0)$ и $\sqrt{T}(C_T - C^0)$ имеют нормальные предельные распределения.

На практике упомянутое выше параметрическое отображение может быть простым. Если априорные ограничения обуславливают только равенство нулю отдельных коэффициентов, часто в качестве параметров можно принять ненулевые коэффициенты, за исключением одного в каждом уравнении, имеющего ненулевое значение в истинной структуре и, согласно условиям, равного 1. Именно этот метод мы использовали в примерах гл. 17.

Заметим также, что гипотезы 2 и 3 предполагают идентифицируемость всех структурных коэффициентов, образующих матрицы B и C . Можно также рассмотреть случай, когда идентифицируемы только некоторые из коэффициентов.

Например, гипотезу 2 можно заменить следующей:

Г и п о т е з а 2'. Матрица B^0 невырождена. Все пары (B, C) , удовлетворяющие одновременно априорным ограничениям, правилу нормализации и равенству $BA^0 + C = 0$, обуславливают равенство коэффициента β_{11} значению β_{11}^0 .

В этом случае можно доказать следующее.

П р е д л о ж е н и е 1'. Если удовлетворяются гипотезы 1 и 2', связь, позволяющая оценить β_{11} на основе приведенной формы, является непрерывной в окрестности истинной структуры.

Более простой метод заключается в разработке для структуры (B, C) искусственных ограничений, позволяющих полностью идентифицировать B и C , но не приводящих к возникновению дополнительных ограничений для приведенной формы.

2. Простые модели

Если модель является одновременно простой и идентифицируемой, оценка коэффициентов структурной формы не выдвигает сложных проблем.

Для уточнения рассмотрим случай, когда для ошибок η_t существуют только те ограничения, которые вытекают из общей стохастической гипотезы и в которой почти всякой матрице A из n строк и m столбцов соответствует единственная пара матриц (B, C) , удовлетворяющая правилу нормализации, ограничениям на коэффициенты структурной формы и уравнениям $BA + C = 0$. Примем две следующие гипотезы.

Гипотеза 5. Векторы η_t независимы друг от друга. Все они имеют одно и то же распределение с нулевым математическим ожиданием и невырожденной ковариационной матрицей Σ , не подчиненной никаким априорным ограничениям.

Гипотеза 6. Векторы z_t ограничены. Матрица M_{zz} невырождена и стремится к невырожденной матрице при неограниченном увеличении T .

Для оценки B и C обычно используется «косвенная регрессия». Оценки коэффициентов приведенной формы получаются выравниванием по методу наименьших квадратов каждой эндогенной переменной x_t по различным экзогенным переменным z_1, z_2, \dots, z_m . Пусть A^* — определенная таким образом матрица. Оценки B и C будут получены в результате решения $BA^* + C = 0$ совместно с правилом нормализации и априорными ограничениями.

Из теории регрессионного анализа (гл. 6) следует, что, если удовлетворяются гипотезы 5 и 6 и матрица B^0 невырождена, A^* является несмещенной состоятельной оценкой, ковариационная матрица которой определяется из известной формулы. При этих же условиях асимптотическое распределение $\sqrt{T}(A^* - A^0)$ нормально. Наконец, если вектор η_t имеет нормальное распределение, A^* будет эффективной оценкой.

Сходимость получаемых на основе косвенной регрессии оценок B^* и C^* к истинным значениям B^0 и C^0 вытекает из гипотез 1, 2, 5 и 6. Если, кроме того, удовлетворяются гипотезы 3 и 4, что в общем характерно для простых моделей, связь между приведенной и структурной формами дифференцируема. Выражения:

$$\sqrt{T}(B^* - B^0) \text{ и } \sqrt{T}(C^* - C^0)$$

имеют нормальное предельное распределение. Наконец, на основе оценок ковариаций A^* , применяя метод гл. 17, § 1 (см. также [254, с.319—322]), можно рассчитать оценки асимптотических ковариаций этих матриц.

Косвенные регрессии в моделях с запаздывающими эндогенными переменными имеют аналогичные асимптотические свойства.

Рассмотрим модель, структурная форма которой имеет вид:

$$Bx_t + Cz_t + D_1 u_{t1} + \dots + D_h u_{th} = \eta_t, \quad (6)$$

где $u_{t\tau}$ — вектор, n_τ компонент которого выбраны среди n компонент $x_{t-\tau}$ (так, для модели § 1, гл. 16 u_{t1} имеет две компоненты, $x_{3,t-1}$ и $x_{5,t-1}$). Матрица D_τ в этом случае имеет n строк и n_τ столбцов. Приведенная форма модели имеет вид:

$$x_t = Az_t + B_1 u_{t1} + \dots + B_h u_{th} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Для моделей такого типа гипотезы 5 и 6 в общем случае должны быть дополнены еще следующими.

Гипотеза 5'. Векторы η_t имеют конечные моменты четвертого порядка.

Гипотеза 6'. При неограниченном увеличении T z_t ограничены и каждая из матриц

$$M_{zz}^\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} z_t z_{t+\tau}'$$

стремится к пределу M_0^τ (при $\tau = 1, 2, \dots, \infty$). Сходимость равномерна по отношению к τ .

Наконец, нам потребуется условие устойчивости, для получения которого запишем модель в форме:

$$Bx_t + Cz_t + F_1 x_{t-1} + \dots + F_h x_{t-h} = \eta_t, \quad (8)$$

где F_τ — квадратная матрица порядка n с теми же самыми ненулевыми элементами, что и D_τ , но содержащая, кроме того, $n - n_\tau$ нулевых столбцов. Истинные значения матриц B, C, F_1, \dots, F_h обозначим через $B^0, C^0, F_1^0, \dots, F_h^0$.

Гипотеза 7. nh корней μ уравнения:

$$|\mu^h B^0 + \mu^{h-1} F_1^0 + \dots + \mu F_{h-1}^0 + F_h^0| = 0 \quad (9)$$

по модулю меньше 1.

Модель будет называться простой, если η_t не подчинены никакому другому ограничению, кроме общей стохастической гипотезы, и если почти каждому множеству $h+1$ матриц A, B_1, \dots, B_h , имеющих приемлемый порядок, соответствует одно-единственное множество матриц B, C, D_1, \dots, D_h , удовлетворяющее правилу нормализации, априорным ограничениям и уравнениям:

$$C + BA = 0, \quad D_1 + BB_1 = 0, \dots, D_h + BB_h = 0. \quad (10)$$

К простым авторегрессионным моделям также можно применить косвенную регрессию. В этом случае получаем оценки коэффициентов приведенной формы A^*, B_1^*, \dots, B_h^* из регрессий каждой эндогенной переменной x_{it} по совокупности предопределенных переменных

$$z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}; \quad u_{1t1}, u_{2t1}, \dots, u_{n_{th}t}.$$

Затем находятся оценки коэффициентов структурной формы совместным решением условия нормализации, априорных ограничений и уравнения (10), в которых A, B_1, \dots, B_h заменены на A^*, B_1^*, \dots, B_h^* . Пусть $B^*, C^*, D_1^*, \dots, D_h^*$ — оценки, полученные таким образом.

Если удовлетворяются гипотезы 5, 6, 6' и 7, то в силу теорем из гл. 14 оценки A^*, B^*, \dots, B_h^* сходятся к истинным значениям A^0, B_1^0, \dots, B_h^0 и случайные матрицы

$$\sqrt{T}(A^* - A^0), \sqrt{T}(B_1^* - B_1^0), \dots, \sqrt{T}(B_h^* - B_h^0)$$

имеют предельные нормальные распределения, дисперсии и ковариации которых можно определить. Наконец, если η_t имеют нормальное распределение, эти оценки будут асимптотически эффективными.

В вышеприведенных условиях можно вывести, что $B^*, C^*, D_1^*, \dots, D_h^*$ сходятся к истинным матрицам $B^0, C^0, D_1^0, \dots, D_h^0$ и что

$$\sqrt{T}(B^* - B^0), \sqrt{T}(C^* - C^0), \sqrt{T}(D_1^* - D_1^0), \dots, \sqrt{T}(D_h^* - D_h^0)$$

имеют предельные нормальные распределения, дисперсии и ковариации которых можно рассчитать на основе метода гл. 17. Достаточно присоединить к гипотезам 1—6 новые гипотезы 5', 6' и 7 и переформулировать гипотезы 1—4, заменив в них (B, C) на (B, C, D_1, \dots, D_h) и $BA + C = 0$ на уравнения (10).

На протяжении этой главы будут рассматриваться переопределенные модели, в которых коэффициенты приведенной формы подчинены ограничениям. Для упрощения изложения мы не будем рассматривать в явном виде модели с эндогенными запаздывающими переменными. Но рассматриваемые методы можно без затруднений применить к авторегрессионным моделям. Для этого достаточно рассматривать запаздывающие эндогенные переменные, как экзогенные. Наличие таких переменных с запаздываниями не повлияет на асимптотические свойства оценок по крайней мере, если удовлетворяются гипотезы 6' и 7. Для более подробного ознакомления читатель может обратиться к [212].

3. Оценки по минимальному расстоянию и квазимаксимуму правдоподобия

В переопределенных моделях матрица A приведенной формы

$$x_t = Az_t + \varepsilon_t$$

подчинена ограничениям. Тем не менее и к ним можно применить принцип косвенной регрессии, т. е. можно получить оценку A , учитывая накладываемые на A ограничения, и вывести из нее оценки B и C .

Для оценки A , в частности, можно использовать изложенные в гл. 9 методы нелинейной регрессии. Пусть S — положительно определенная матрица порядка n . В качестве оценки $A_T(S)$ мы выбрали матрицу A , удовлетворяющую ограничениям и минимизирующую «расстояние»:

$$L_T(S, A) = \sum_{t=1}^T (x_t - Az_t)' S (x_t - Az_t). \quad (11)$$

В результате совместного решения априорных ограничений, правила нормализации и равенства:

$$BA_T(S) + C = 0$$

ей можно поставить в соответствие две оценки — $B_T(S)$ и $C_T(S)$. Эти оценки сходятся к истинным значениям B^0 и C^0 при достаточно общих условиях, что вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Если удовлетворяются гипотезы 1, 2, 5, 6 и случайная, положительно определенная матрица S_T стремится по вероятности к положительно определенной матрице S , то $B_T(S_T)$ и $C_T(S_T)$ стремятся по вероятности к истинным матрицам B^0 и C^0 .

Действительно, поскольку истинная матрица невырождена и ошибки η_t соответствуют гипотезе 5, ошибки ε_t будут удовлетворять гипотезе 1 гл. 9. Так как z_t удовлетворяют гипотезе 6, из теоремы 6 (гл. 9) вытекает, что $A_T(S_T)$ стремится по вероятности к A^0 . Предложение 1 в этом случае предусматривает, что $B_T(S_T)$ и $C_T(S_T)$ стремятся к B^0 и C^0 .

Т. Браун [40] предложил оценки $B_T(I)$ и $C_T(I)$ для случая, когда S является единичной матрицей. Он дал этому методу оценки название «синхронного метода наименьших квадратов» и показал (по крайней мере на примере), что результаты мало отличаются от тех, которые получаются с помощью других методов, рассмотренных ниже. М. Накамура [228] доказал состоятельность $B_T(I)$ и $C_T(I)$.

Поскольку для матрицы Σ не имеется ограничений, их не существует также и для Ω . Разработанная в гл. 9 теория устанавливает, что, если S_T стремится к ковариационной матрице ε_t , т. е.

$$\Omega = (B^0)^{-1} \Sigma (B^0)^{-1},$$

$A(S_T)$ является асимптотически эффективной в классе оценок по минимальному расстоянию. В этом случае оценки B^{**} и C^{**} определяются следующим образом.

1) Пусть A^* — матрица коэффициентов регрессии эндогенных переменных x_i на экзогенные переменные z_1, z_2, \dots, z_m .

2) Пусть $M_{\varepsilon\varepsilon}^*$ — матрица моментов второго порядка эмпирических ошибок

$$\varepsilon_t^* = x_t - A^* z_t.$$

3) Пусть A^{**} — матрица, удовлетворяющая ограничениям для приведенной формы и минимизирующая

$$L_T[(M_{\varepsilon\varepsilon}^*)^{-1}, A].$$

4) Пусть B^{**} и C^{**} — матрицы, удовлетворяющие равенству $BA^{**} + C = 0$ совместно с априорными ограничениями и правилом нормализации.

Можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Если удовлетворяются гипотезы 1—6 и если матрица S_T стремится по вероятности к положительно определенной матрице S , то

$$\sqrt{T}[B_T(S_T) - B^0] \text{ и } \sqrt{T}[C_T(S_T) - C^0]$$

имеют нормальное предельное распределение. Если, кроме того, η_t распределено нормально, то B^{**} и C^{**} являются асимптотически эффективными оценками.

Действительно, в силу предложения 2 существует параметрическое отображение $A(\alpha)$ матриц, удовлетворяющих ограничениям для приведенной формы. Из теорем 4 и 5 гл. 9 следует, что

$$\sqrt{T}[A_T(S_T) - A^0]$$

имеет нормальное предельное распределение и что A^{**} асимптотически эффективна, если η_t нормально распределено. Также в силу предложения 2 от A к (B, C) можно перейти на основе дифференцируемого преобразования. Таким образом, аналогичные свойства имеют и $B_T(S_T)$, $C_T(S_T)$ и B^{**} , C^{**} .

В следующей главе будет показано, каким образом оценки B^{**} и C^{**} можно увязать с теми оценками, которые мы рассматривали в примерах гл. 17. Любая другая асимптотически эквивалентная оценка будет обладать свойствами, которые в данный момент представляются аналогичными, поскольку мы недостаточно хорошо знаем характерные свойства малых выборок.

Так, в частности, обстоит дело с оценкой максимизирующей функцию правдоподобия, когда ошибки нормально распределены и матрица Σ , а следовательно, и Ω не подвержены ограничениям. Эта оценка рассматривалась в гл. 9, § 3, и ее легко можно вывести на основе определения моделей из систем уравнений.

Матрица M , определяемая уравнением (25) гл. 9, в данном случае имеет вид:

$$M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - Az_t)(x_t - Az_t)'. \quad (12)$$

Оценкой максимального правдоподобия матрицы A является матрица \hat{A} , минимизирующая $|M|$ и удовлетворяющая ограничениям, наложенным на приведенную форму. Оценками максимального правдоподобия B и C являются матрицы, удовлетворяющие $B\hat{A} + C = 0$ совместно с априорными ограничениями и правилом нормализации.

Первые систематические работы по оценке моделей из систем уравнений были проведены «Комиссией Коулса» — исследовательской группой при Чикагском университете¹. Принцип максимального правдоподобия применялся исходя из гипотезы нормального распределения ошибок. Так, была получена, в частности, оценка, которую мы только что определили.

В работах Комиссии Коулса подчеркивался тот факт, что найденные оценки имеют асимптотические свойства, мало зависящие от нормаль-

¹ Систематическое изложение результатов Комиссии Коулса было сделано Т. Купмансом, Х. Рубином и Р. Лейпником [182] и Т. Купмансом и У. Худом [180]. Их подход принят в большинстве последних работ по эконометрической теории моделей из систем уравнений, в частности [49], [101].

ности распределения ошибок. Поэтому было предложено использовать эти оценки даже тогда, когда такая нормальность не гарантирована, и называть их в этом случае «оценками квазимаксимального правдоподобия».

4. Ограничения для ковариационной матрицы ошибок

До сих пор предполагалось, что для матриц ошибок в структурных уравнениях Σ не существует никаких ограничений. Теперь же рассмотрим форму, которую принимают оценки квазимаксимума правдоподобия, если Σ подчинена некоторым ограничениям.

При наличии ограничений на Σ проще рассматривать структурную форму модели. Если η_t независимы друг от друга и распределены нормально, логарифм плотности распределения T векторов η_t имеет вид:

$$-\frac{nT}{2} \lg 2\pi - \frac{T}{2} \lg |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \eta_t' \Sigma^{-1} \eta_t.$$

Постоянной $-(nT/2) \lg 2\pi$ можно пренебречь и записать выражение логарифма плотности распределения T векторов x_t в форме:

$$T \lg |B| - \frac{T}{2} \lg |\Sigma| - \frac{T}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} N, \quad (13)$$

где

$$N = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Bx_t + Cz_t)(Bx_t + Cz_t)' \quad (14)$$

(в действительности $|B|$ является якобианом преобразования η_t в x_t).

Для определения оценок B , C и Σ нужно максимизировать (13) по этим трем матрицам, учитывая наложенные на них ограничения и правило нормализации.

Практически наиболее интересным является случай, когда можно предположить, что *ошибки различных структурных уравнений независимы*. В этом случае известно, что матрица Σ должна быть диагональной, но относительно дисперсии σ_i^2 отклонений, влияющих на i -е структурное уравнение, нет какой-либо информации. Выражение (13) в этом случае примет вид:

$$T \lg |B| - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n \lg \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{1}{2\sigma_i^2} (b_i' x_t + c_i' z_t)^2, \quad (15)$$

где b_i и c_i — векторы коэффициентов при эндогенных и экзогенных переменных в i -м структурном уравнении.

Для максимизации (15) можно сначала фиксировать B и C и определить соответствующие значения σ_i . Максимизация (15) по σ_i^2 требует:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (b_i' x_t + c_i' z_t)^2.$$

Таким образом, оценка σ_i^2 представляет собой средний квадрат отклонений от оценок структурных уравнений. После замены σ_i^2 на эту величину, деления на T и исключения постоянной

$$-\frac{n}{2} (1 + \lg T)$$

выражение (15) принимает вид:

$$\lg |B| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lg \left\{ \sum_{t=1}^T (b'_i x_t + c'_i z_t)^2 \right\}. \quad (16)$$

Оценки B и C будут получены в результате максимизации (16) при наличии априорных ограничений и правила нормализации (по вопросам применения см. [170, с. 100—107]).

5. Рекурсивные модели

Такая максимизация особенно проста в *рекурсивных моделях*, которые уже рассматривались в гл. 16, § 4. Напомним и уточним характеристики этих моделей.

1) В рекурсивных моделях расположение эндогенных переменных и порядок структурных уравнений таковы, что i -е структурное уравнение включает i -ю эндогенную переменную и может включать также эндогенные переменные низшего ранга, но не включает эндогенных переменных высшего порядка. (В авторегрессионной модели запаздывающие значения всех эндогенных переменных могут входить в любое уравнение.) В общем случае считается, что i -е уравнение служит для определения i -й эндогенной переменной через эндогенные переменные низшего ранга и предопределенные переменные.

Если эндогенные переменные и уравнения упорядочены таким образом, $\beta_{ih} = 0$ при $h > i$. Матрица B является «треугольной», над главной диагональю она содержит только нули. В качестве правила нормализации можно установить, что коэффициент β_{ii} при переменной i в i -м уравнении должен быть равен 1. Поэтому определитель B всегда равен 1.

2) Ошибки η_{it} различных структурных уравнений независимы, матрица Σ диагональна.

3) Ограничения для коэффициентов структурных уравнений относятся каждое к коэффициентам только одного уравнения. Таким образом, эти ограничения можно разделить на n групп, причем i -я группа будет включать ограничения, которые относятся к коэффициентам только i -го структурного уравнения.

Если условия 1 и 2 удовлетворяются, максимизируемое выражение (16) сводится к сумме n слагаемых, причем i -е слагаемое включает только коэффициенты i -го структурного уравнения. Если удовлетворяется также условие 3, оценки квазimaxимума правдоподобия коэффициентов i -го структурного уравнения будут получены независимо от

оценок коэффициентов других уравнений. Точнее, они определяются путем минимизации выражения

$$\sum_{t=1}^T (b'_i x_t + c'_i z_t)^2$$

при наличии ограничений на i -е уравнение и правила нормализации $\beta_{ii} = 1$.

Можно утверждать, что в рекурсивной модели, которая удовлетворяет сформулированным выше условиям 1, 2 и 3 и ошибки в которой подчинены гипотезе 5, к i -му структурному уравнению можно применить метод наименьших квадратов совершенно так же, как если бы $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{i-1,t}$ были экзогенными переменными.

Чтобы подкрепить это утверждение, рассмотрим случай, когда априорные ограничения обуславливают только равенство нулю отдельных коэффициентов. Оценки коэффициентов i -го уравнения, которые не обязательно равны нулю, будут получены на основе регрессии x_{it} по другим входящим в это уравнение переменным. Пусть β_{ih}^* и γ_{ij}^* будут этими оценками (где h соответствует некоторым индексам от 1 до $i-1$, а j — некоторым индексам от 1 до m). Пусть η_{it}^* будет отклонением от расчетного значения уравнения для наблюдения t .

Можно рассмотреть условные распределения относящихся к уравнению i β_{ih}^* , γ_{ij}^* и η_{it}^* для фиксированных значений $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{i-1,t}$ или — что равнозначно — для фиксированных значений $\eta_{1t}, \eta_{2t}, \dots, \eta_{i-1,t}$. Эти условные распределения имеют свойства, вытекающие непосредственно из теории множественных регрессий.

Так, условные математические ожидания β_{ih}^* и γ_{ij}^* равны истинным значениям β_{ih} и γ_{ij} . Их условные дисперсии и ковариации определяют матрицу, равную $\sigma_i^2 W_i^{-1}$, где σ_i^2 — дисперсия η_i , а W_i — матрица наблюдаемых моментов, входящих в i -е уравнение переменных за исключением x_i . Обозначим через m_i число этих переменных. Условное распределение η_{it}^* независимо от условного распределения β_{ih}^* и γ_{ij}^* . Условное математическое ожидание суммы квадратов η_{it}^* равно $(T - m_i)\sigma_i^2$. Пусть $(T - m_i)\sigma_i^2$ будет этой суммой. Матрица $\sigma_i^2 W_i^{-1}$ является несмещенной оценкой матрицы условных ковариаций оценок коэффициентов. Наконец, если η_{it} нормально распределено, β_{ih}^* и γ_{ij}^* будут иметь условное нормальное распределение, а величина

$$(T - m_i) \frac{\sigma_i^{*2}}{\sigma_i^2}$$

— условное распределение χ^2 с $T - m_i$ степенями свободы.

Таким образом, использование в данном случае общепотребительных методов можно легко обосновать. Например, безусловное математическое ожидание β_{ih}^* равно истинному значению β_{ih} , поскольку условное ожидание всегда равно этому значению. Если σ_{ih}^{*2} — оценка условной дисперсии β_{ih}^* на основе $\sigma_i^{*2} W_i^{-1}$ и η_{it} нормально распределено, отношение

$$\frac{\beta_{ih}^* - \beta_{ih}}{\sigma_{ih}^*}$$

будет иметь распределение Стьюдента с $T - m_i$ степенями свободы, независимо от того, считаются $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{i-1,t}$ фиксированными или нет.

Г. Волду в серии работ, важнейшие из которых приведены в библиографии к этой книге, удалось хорошо показать достоинства вычислений в рекурсивных моделях.

6. Вычислительные методы для моделей, содержащих только исключаяющие ограничения

1) Общие положения

За исключением случая рекурсивных моделей, только что изложенные общие методы оценки сводятся к максимизации величин, являющихся сложными выражениями неизвестных параметров. Несомненно, некоторые модели могут иметь симметричную структуру и сравнительно легко поддаваться оцениванию, подобный пример был дан в гл. 9, § 6. Другие модели могут содержать только три или четыре уравнения и достаточно ограниченное число параметров, чтобы можно было без особых затруднений работать непосредственно с явными формами максимизируемых величин. Но многие экономические модели являются результатом сопоставления более или менее значительного числа законов, каждый из которых отражает определенный тип поведения или отдельное основополагающее ограничение. Эти законы относятся к определенному числу экзогенных и эндогенных переменных. Основанные на них модели в общем случае лишены симметрии и часто имеют гораздо более сложную структуру, чем структура модели, описанной в начале гл. 16¹. Расчеты в соответствии с одним из изложенных в гл. 9, § 4 общих методов могут в этом случае оказаться весьма трудоемкими.

Однако чаще всего единственные априорные ограничения модели представлены ограничениями, специфицирующими список включаемых в каждое структурное уравнение переменных («исключающие ограничения»). Матрица Σ в этом случае не подчинена никаким ограничениям, тогда как в матрицах B и C некоторые элементы равны нулю, а другие являются произвольными. В этом случае возможно значительное упрощение вычислительных операций.

Итак, предположим, что мы определяем оценки по минимальному расстоянию $B_T(S)$ и $C_T(S)$ при условии, что некоторые специфицированные элементы этих матриц равны нулю. Допустим, кроме того, что правило нормализации специфицирует равенство 1 коэффициента при x_{it} в i -м структурном уравнении:

$$\beta_{ii} = 1 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

¹ Модель американской экономики [174] представляет собой весьма типичный пример моделей умеренного, хотя и довольно значительного, размера. Она включает 18 экзогенных переменных и 15 структурных уравнений. Недавно в качестве инструментов для прогнозирования колебаний национальной конъюнктуры были использованы модели, содержащие гораздо большее число переменных и уравнений.

Минимизируемое выражение (11) можно записать:

$$T \operatorname{tr} (SM), \quad (18)$$

где M — матрица, определяемая из (12). Условия минимизации могут быть выражены в компактном виде:

$$\operatorname{tr} (SdM) = 0. \quad (19)$$

Подразумевается, что это равенство должно тождественно удовлетворяться для любого значения dM , удовлетворяющего априорным ограничениям и правилу нормализации в окрестностях решения \hat{M} . Это условие выразим в явном виде, учитывая особую форму априорных ограничений.

Учтем тот факт, что матрицу S можно определить различными способами. Для оценок B^{**} , C^{**} полагаем $S = (M_{ee}^*)^{-1}$. Для оценок квазimaxимального правдоподобия \hat{B} , \hat{C} принимаем $S = \hat{M}^{-1}$ и, таким образом, S будет постоянно пересматриваться по мере получения улучшенных приближений \hat{B} , \hat{C} и \hat{M} . (Отдельное значение S получается с помощью аналитического метода гл. 9, § 3; можно также отметить, что условием минимизации $|M|$, как показывают приведенные в приложении 2 к главе 5 правила дифференцирования, является $\operatorname{tr} (M^{-1}dM) = 0$.)

Дифференциал dM можно записать в виде: $dH + dH'$, где

$$dH = \frac{-1}{T} \sum_{t=1}^T dA \cdot z_t (x_t - Az_t)'. \quad (20)$$

Поскольку матрица S симметрична, условие (19) можно также записать: $2\operatorname{tr} (SdH) = 0$. Кроме того, уравнение $A = -B^{-1}C$ предполагает:

$$dA = B^{-1}dB B^{-1}C - B^{-1}dC. \quad (21)$$

Введем следующие обозначения:

$$P = [B \ C] \quad y_t = \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad \tilde{y}_t = \begin{bmatrix} -B^{-1} C z_t \\ z_t \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Здесь P — матрица всех коэффициентов (как и в гл. 18), y_t — вектор $n + m$ переменных, \tilde{y}_t — аналогичный вектор, в котором наблюдаемые значения эндогенных переменных (x_{it}) заменены их математическими ожиданиями $(x_{it} - \varepsilon_{it})$, рассматриваемыми как функции неизвестных коэффициентов. Используя эти определения, можно записать:

$$dA \cdot z_t = -B^{-1} dP \begin{bmatrix} -B^{-1} C \\ I \end{bmatrix} z_t = -B^{-1} dP \tilde{y}_t \quad (23)$$

и

$$x_t - Az_t = B^{-1} P y_t.$$

Следовательно,

$$dH = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T B^{-1} dP \tilde{y}_t y_t' P' (B')^{-1} \quad (24)$$

и $\text{tr}(SdH) = \text{tr}(JdP)$, где

$$J = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_t y_t' P' V^{-1} \quad (25)$$

и

$$V = BS^{-1}B'. \quad (26)$$

Для частного случая оценки квазикасимального правдоподобия $S^{-1} = M$ и матрицу V можно также записать:

$$V = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Bx_t + Cz_t)(Bx_t + Cz_t)'. \quad (27)$$

Это — ковариационная матрица эмпирических отклонений структурных уравнений. Она является также оценкой для S .

Полученное условие для $\text{tr}(JdP) = 0$ представляет некоторый интерес, поскольку оно приводит к явной форме системы уравнений, которую необходимо решить. Рассмотрим равенство нулю производной по неизвестному коэффициенту β_{ih} . Оно будет как раз равенством нулю элемента (h, i) матрицы J . Таким образом, можно непосредственно построить систему уравнений на основе этой матрицы, используя ее элементы, соответствующие неизвестным элементам P' .

Форма матрицы J показывает, что эту систему трудно решить непосредственно, так как \tilde{y}_t и V зависят от неизвестных коэффициентов матрицы P . Если нас не удовлетворяет приближение, необходимо использовать итеративный метод, сосредоточив внимание либо на решении условий первого порядка, либо непосредственно на минимизации L_T (эти два подхода приводят, в действительности, к сходным методам).

Заметим также, что в рассматриваемом случае рассчитать оценки квазикасимального правдоподобия будет, очевидно, не намного труднее, чем любые другие оценки, рассмотренные здесь. Таким образом, можно в дальнейшем принять для матрицы V форму, заданную уравнением (27).

2) Трехшаговый метод наименьших квадратов

Рассмотрим прежде всего приближенный метод, подсказанный формой матрицы J . В любой элемент J вектор $y_t' P'$ вводит члены, линейные по отношению к оцениваемым параметрам. Таким образом, систему условий первого порядка будет легко решить, если заменить в ней элементы \tilde{y}_t и V величинами, которые в расчетах остаются постоянными. Априори представляется, что эта замена должна привести к хорошему приближению, если вместо элементов \tilde{y}_t использовать

предварительные и уже приближенные оценки математических ожиданий переменных, а элементы V заменить ковариациями эмпирических ошибок, которые появляются в структурных уравнениях после проведения предварительной оценки.

Изложенная выше идея лежит в основе *трехшагового метода наименьших квадратов*, который был предложен в 1962 году А. Цельнером и Г. Тейлом [344], и с тех пор часто применялся. В гл. 20 будет показано, что так называемый «двухшаговый метод наименьших квадратов» позволяет сравнительно просто определить состоятельные оценки. Первый этап этого метода заключается в расчете классической множественной регрессии каждой эндогенной переменной по всем экзогенным переменным; она дает предварительные оценки математических ожиданий эндогенных переменных. Если дополнить их значениями экзогенных переменных, получаем вектор y_i^* с той же структурой, что и \tilde{y}_i . Второй этап позволяет получить оценки B и C и с помощью формулы (27) оценку V^* ковариационной матрицы V . Применяемый в трехшаговом методе наименьших квадратов третий этап заключается в решении системы, образуемой в результате приравнивания нулю всех элементов (h, i) или (j, i) , которые в матрице

$$J^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^* y_t' P' (V^*)^{-1} \quad (28)$$

соответствуют неизвестным элементам β_{ih} или γ_{ij} . В результате получаем систему N линейных уравнений для N неизвестных коэффициентов P , которая решается обычными методами.

Ниже мы увидим, что получаемые таким образом оценки будут асимптотически эквивалентны оценкам квазимаксимума правдоподобия. Таким образом, получаем весьма удовлетворительное приближение, поскольку обращение к функциям квазимаксимума правдоподобия объясняется только их асимптотическими свойствами.

Заметим также, что, если матрица V^* диагональна, оценки *трехшагового метода наименьших квадратов* будут совпадать с оценками *двухшагового метода наименьших квадратов*. Действительно, рассмотрим, например, уравнение, соответствующее неизвестному коэффициенту β_{ih} . После исключения постоянного множителя оно будет иметь вид:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{n+m} y_{ht}^* y_{kt} p_{ik} = 0. \quad (29)$$

Оно включает в себя только коэффициенты p_{ik} i -го структурного уравнения модели. Объединение уравнений, аналогичных (29) и соответствующих неизвестным коэффициентам одного только i -го структурного уравнения, определяет в точности такую же систему, как та, которая решается на втором этапе применения двухшагового метода наименьших квадратов (см. гл. 20, § 4). Таким образом, третий этап приведет заново к результатам второго этапа. Итак, использование трехшагового метода наименьших квадратов имеет смысл только в том случае, если

матрица V^* недиагональна, т. е. если ошибки в различных структурных уравнениях коррелируют друг с другом.

3) Методы Дарбина и Ньютона

Форма матрицы J подсказывает также следующий метод, предложенный Д. Дарбином [80].

1) На основе предварительных оценок $\beta_{ih}^{(0)}$ и $\gamma_{ij}^{(0)}$, например оценок по двухшаговому методу наименьших квадратов, рассчитываем с помощью формул (22) и (27) соответствующие значения $\tilde{y}_i^{(0)}$ и $V^{(0)}$ вектора \tilde{y}_i и матрицы V . Затем в результате решения линейной системы, получаемой путем приравнивания нулю соответствующих элементов матрицы

$$J^{(0)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_i^{(0)} y'_t P' [V^{(0)}]^{-1},$$

определяем новые оценки $\beta_{ih}^{(1)}$ и $\gamma_{ij}^{(1)}$, а следовательно, и новую матрицу $P^{(1)}$.

2) На основе $P^{(1)}$ рассчитываем новые значения $\tilde{y}_i^{(1)}$ и $V^{(1)}$, затем решаем для β_{ih} и γ_{ij} систему, получаемую на основе новой матрицы

$$J^{(1)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_i^{(1)} y'_t P' [V^{(1)}]^{-1}.$$

Пусть $P^{(2)}$ будет рассчитанной таким образом новой оценкой P .

3) Продолжаем последовательность этих операций до необходимой степени сходимости.

Этот метод Дарбина заключается в решении на каждой итерации системы, в которой мы пренебрегаем некоторыми членами, содержащимися в уравнениях в общем методе Ньютона. Последний мы рассматривали в гл. 9, § 4, уравнение (36).

Для применения метода Ньютона к рассматриваемой проблеме нужно рассчитать выражение, обозначаемое в гл. 9 как $\frac{\partial}{\partial \alpha_h} H_k(\alpha^s)$, т. е. производные соответствующих элементов J по всем неизвестным коэффициентам. Если бы \tilde{y}_i и V не были функциями этих коэффициентов, производные можно было бы найти только на основе P , и уравнения в системе Ньютона были бы идентичны уравнениям, рассматриваемым Дарбином. Но] полное дифференцирование J приводит к появлению дополнительных членов, получаемых из \tilde{y}_i и V .

После дифференцирования определяющей \tilde{y}_i формулы (22) обнаруживаем, что производные m последних компонент этого вектора равны нулю, тогда как производные n первых компонент задаются выражениями:

$$\frac{\partial \tilde{y}_{\lambda i}}{\partial \beta_{ih}} = -b^{\lambda i} \tilde{y}_{hi}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{\lambda i}}{\partial \gamma_{ij}} = -b^{\lambda i} z_{ji}, \quad (30)$$

где $b^{\lambda i}$ — элемент (λ, i) матрицы B^{-1} .

После дифференцирования определяющей V формулы (27) видим, что производные $v_{\lambda\mu}$ по β_{ih} и γ_{ij} равны нулю, если λ и μ оба отличаются от i , и что

$$\frac{\partial v_{i\mu}}{\partial \beta_{ih}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{ht} \cdot p'_{\mu} y_t, \quad \text{если } \mu \neq i \quad (31)$$

и равно этой удвоенной величине, если $\mu = i$ (здесь p_{μ} является вектором коэффициентов μ -го структурного уравнения, т. е. вектором элементов μ -й строки P). Если же рассмотреть производную

$$\frac{\partial v^{rs}}{\partial \beta_{ih}}$$

элемента (r, s) матрицы V^{-1} и учесть, что $dV^{-1} = -V^{-1} \cdot dV \cdot V^{-1}$, то можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{rs}}{\partial \beta_{ih}} &= - \sum_{\lambda\mu} v^{r\lambda} v^{\mu s} \frac{\partial v_{\lambda\mu}}{\partial \beta_{ih}} = - \sum_{\mu} (v^{ri} v^{\mu s} + v^{r\mu} v^{is}) \times \\ &\times \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{ht} \cdot p'_{\mu} y_t. \end{aligned} \quad (32)$$

Эту же формулу можно применить для производной v^{rs} по γ_{ij} , только x_{ht} заменяется на z_{jt} .

Уравнения (30) и (32) составлены так, чтобы было возможно показать форму дополнительных членов, появляющихся при использовании метода Ньютона. Но полная запись исходной системы уравнений слишком трудоемка. Расчеты на каждой итерации сложнее, чем в методе Дарбина, но трудности сравнимы. Если верить исследованию Г. Чоу [48], сходимость для метода Ньютона будет гораздо более быстрой, чем для метода Дарбина, так что общее время расчетов будет меньше.

Различные усовершенствования метода Ньютона, описанные в гл. 9, § 4, очевидно, могут сыграть свою роль в расчетах по моделям из системы уравнений. Могут быть использованы и другие градиентные методы (см. работы [47], [39], [89]).

4) Ковариационная матрица оценок

Изучение системы, полученной путем приравнивания к нулю соответствующих элементов J , приводит к простому методу для оценки матрицы асимптотических ковариаций оценок коэффициентов.

Для ясности запишем в другой форме систему условий первого порядка. Преимущество ее состоит в том, что она в явном виде отражает расчеты, необходимые при использовании различных методов, принципы которых только что были изложены.

Запишем i -е структурное уравнение в форме:

$$x_{it} = \delta'_i; u_{it} + \eta_{it}, \quad (34)$$

где δ_i — вектор только неизвестных коэффициентов этого уравнения (k -я компонента этого вектора будет записана как δ_{ik}), а u_{it} — вектор

компонент y_t , которые входят в уравнение с неизвестными коэффициентами. Используя эти новые обозначения, можно записать:

$$(Py)_i = x_{it} - \delta'_i u_{it}.$$

Элемент (k, i) матрицы J теперь будет иметь форму:

$$\frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{ht} (x_{ht} - \delta'_h u_{ht}) v^{hi},$$

где v^{hi} — элемент (h, i) матрицы v^{-1} .

Мы должны записать равенство нулю компонент \tilde{y}_{ht} , входящих в i -е структурное уравнение с неизвестными коэффициентами. Если обозначить *вектор* этих компонент через \tilde{u}_{it} , можно записать систему условий первого порядка в форме:

$$\frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{u}_{it} (x_{ht} - \delta'_h u_{ht}) v^{hi} = 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Преимущество этой записи состоит в том, что она позволяет в явном виде и без дополнительных условий записать решаемую систему уравнений. Для каждого значения i \tilde{u}_{it} будет иметь столько компонент, сколько неизвестных коэффициентов имеется в соответствующем структурном уравнении. Число уравнений типа (35) в точности равно числу определяемых переменных.

Чтобы отличать оценки от истинных величин, обозначим через $\hat{\delta}_{hj}$ значение, принимаемое δ_{hj} в решении системы (35). Точно так же обозначим через \hat{u}_{iht} значение u_{iht} и через \hat{v}^{hi} — значение v^{hi} . В целом можно переписать систему (35) в форме:

$$\frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} (x_{ht} - \hat{\delta}'_h u_{ht}) \hat{v}^{hi} = 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (36)$$

В этой системе x_{ht} заменим его значением из h -го структурного уравнения, т.е. $\delta'_h u_{ht} + \eta_{ht}$. Получаем:

$$\frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} (\hat{\delta}_h - \delta_h)' u_{ht} \hat{v}^{hi} = \frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} \hat{v}^{hi} \eta_{ht} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Обозначим теперь через δ и $\hat{\delta}$ векторы из N компонент, состоящие соответственно из δ_h и $\hat{\delta}_h$.

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}_n \end{bmatrix}.$$

(Через δ_{hj} буду по-прежнему обозначаться компоненты вектора δ .) Положим:

$$g_{ik, hj} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{u}_{ikt} v^{ht} u_{hjt} \quad (38)$$

и

$$f_{ik} = \frac{1}{T} \sum_{h=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{u}_{ikt} v^{ht} \eta_{ht} \quad (39)$$

и обозначим точно так же через $\hat{g}_{ik, hj}$ и \hat{f}_{ik} значения этих величин после замены \tilde{u}_{it} и v^{ht} в них на \hat{u}_{it} и \hat{v}^{ht} . Пусть G и \hat{G} — квадратные матрицы порядка N , состоящие из $g_{ik, hj}$ и $\hat{g}_{ik, hj}$, пусть f и \hat{f} — векторы из N компонент, состоящие из \hat{f}_{ik} и f_{ik} .

С помощью этих новых обозначений систему N уравнений (37) можно представить в более компактной форме:

$$\hat{G}(\hat{\delta} - \delta) = \hat{f}, \quad (40)$$

откуда

$$\hat{\delta} = \delta + \hat{G}^{-1} \hat{f}. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta)$. Не имеет смысла детально уточнять гипотезы, необходимые для справедливости нижеперечисленных свойств. Эти гипотезы аналогичны гипотезам, введенным в гл. 6, § 8 и в гл. 9, § 5.

Поскольку $\hat{\delta}$ стремится по вероятности к δ , у матриц \hat{G} и G один и тот же предел по вероятности, т. е. G_{∞} , и векторы $\sqrt{T}f$ и $\sqrt{T}\hat{f}$ обладают одинаковым распределением. Следовательно, $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta)$ имеет то же предельное распределение, что и $G_{\infty}^{-1} \sqrt{T}f$. Но $\sqrt{T}f$ имеет предельное нормальное распределение, в ковариационной матрице которого присутствует в качестве элемента (ik, hj) предел выражения:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{u}_{ikt} \tilde{u}_{hjt} \cdot \sum_{r, s=1}^n v^{ri} \sigma_{rs} v^{sh}. \quad (42)$$

При использовании таких методов, как метод квазimaxимума правдоподобия или метод оценок по минимальному расстоянию, в которых $S^{-1} = M_{\varepsilon\varepsilon}^*$, матрица \hat{V} стремится по вероятности к Σ . Таким образом, в пределе вышеупомянутое выражение (42) эквивалентно выражению:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{u}_{ikt} v^{ht} \tilde{u}_{hjt}. \quad (43)$$

Но эта величина эквивалентна $g_{ik, hj}$, поскольку она отличается от нее только на член, который стремится по вероятности к нулю. Таким образом, асимптотическая ковариационная матрица $\sqrt{T}f$ равна G_{∞} , а

асимптотическая ковариационная матрица $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta)$ равна G_{∞}^{-1} . В качестве состоятельной оценки ковариационной матрицы $\hat{\delta}$ в этом случае можно принять $\frac{1}{T(\hat{G}-1)}$.

Сделанные выше рассуждения асимптотического характера можно с таким же успехом применить к любой системе, например,

$$G^*(\hat{\delta} - \delta) = f^*, \quad (44)$$

в которой G^* имеет тот же предел по вероятности, что и G , а $\sqrt{T}f^* -$ то же предельное распределение, что и $\sqrt{T}f$. Точнее, на основе сравнения систем (40) и (44) можно написать:

$$\hat{G}(\hat{\delta} - \hat{\delta}) = (\hat{f} - f^*) + (\hat{G} - G^*)(\delta - \hat{\delta}).$$

Если \hat{G} и G^* имеют одинаковый предел по вероятности и если $\sqrt{T}(\hat{f} - f^*)$ стремится по вероятности к нулю, то $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \hat{\delta})$ также стремится к нулю, так что оценки $\hat{\delta}$ и $\hat{\delta}$ асимптотически эквивалентны.

Это наблюдение доказывает асимптотическую эквивалентность оценок по трехшаговому методу наименьших квадратов оценкам квазimaxимума правдоподобия. Действительно, замена J на J^* выражается в замене \tilde{y}_t и V векторами y_t^* и матрицей V^* с одинаковыми пределами по вероятности. Получаемая таким образом матрица G^* имеет тот же предел, что и G , и вектор $\sqrt{T}f^*$ имеет то же предельное распределение, что и $\sqrt{T}f$.

5) Процедура оценивания с учетом тождеств

До сих пор предполагалось, что модель не содержит тождеств. Конечно, тождества всегда можно исключить. Но, как мы уже видели, такое исключение приводит к усложнению ограничений на коэффициенты. Если в исходной форме модели присутствуют только исключаящие ограничения, на форму, полученную после исключения тождеств, часто накладываются более сложные ограничения. Но мы увидим, что вышеизложенные методы можно применить непосредственно к исходной форме.

Воспользуемся обозначениями из гл. 18 и запишем модель вместе с тождествами:

$$\left. \begin{aligned} B_1 x_t + B_2 q_t + C_1 z_t &= \eta_t, \\ B_3 x_t + B_4 q_t + C_2 z_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Исключение тождеств приводит к обычной форме $Bx_t + Cz_t = \eta_t$, где матрицы B и C определяются из

$$\left. \begin{aligned} B &= B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3, \\ C &= C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Сохраним обозначение P для матрицы $[B \ C]$ коэффициентов формы, полученной после исключения тождеств, и обозначим через P_* матрицу $[B_1 \ B_2 \ C_1]$ коэффициентов первоначальной формы. Все неизвестные коэффициенты модели (45) принадлежат P_* , которая к тому же подчинена определенному числу исключаяющих ограничений. Сохраняя для y_t и \tilde{y}_t обозначения (22), запишем также

$$y_{t*} = \begin{bmatrix} x_t \\ q_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t \\ -B_4^{-1}(B_3 x_t + C_2 z_t) \\ z_t \end{bmatrix} \quad (47)$$

и положим

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_4^{-1}B_3 & -B_4^{-1}C_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (48)$$

В этом случае система (46) и определение (47) предполагают:

$$P = P_* R; \quad y_{t*} = R y_t. \quad (49)$$

\tilde{y}_t можно связать вектор той же формы, что и y_{t*} , в котором векторы эндогенных переменных x_t и q_t заменены их математическими ожиданиями:

$$\tilde{y}_{t*} = \begin{bmatrix} -B^{-1}Cz_t \\ B_4^{-1}(B_3 B^{-1}C - C_2)z_t \\ z_t \end{bmatrix} = R \tilde{y}_t. \quad (50)$$

Полученное в § 6 (1) условие $\text{tr}(JdP) = 0$, очевидно, можно использовать и в новой, рассматриваемой здесь ситуации, причем матрица J по-прежнему определяется из (25). Но матрица dP , если она выражается на основе дифференциалов неизвестных коэффициентов исходной формы, уже не будет иметь такой простой структуры. Чтобы прийти к легко интерпретируемому условию, dP нужно записать как преобразование dP_* . Первое из равенств (49) дает непосредственно $dP = dP_* R$, поскольку R — полностью известная матрица. Таким образом, можно $\text{tr}(JdP) = 0$ заменить условием $\text{tr}(J_* dP_*) = 0$, где $J_* = RJ$. В этом случае условия первого порядка предполагают приравнивание нулю элементов J^* , соответствующих неизвестным коэффициентам P'_* .

Но равенства (49) предполагают $P y_t = P_* y_t^*$. Учитывая (25) и (50), запишем матрицу J_* :

$$J_* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t*} y_{t*}' P_*' V^{-1}. \quad (51)$$

В этом выражении V можно интерпретировать как ковариационную матрицу эмпирических ошибок исходных структурных уравнений, поскольку уравнение (27) предполагает:

$$V = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (Py_i)(Py_i)' = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (P_* y_{i*})(P_* y_{i*})'. \quad (52)$$

Таким образом, мы заменили условие $\text{tr}(JdP) = 0$ условием $\text{tr}(J_*dP_*) = 0$ и матрицу J , определяемую равенством (25), заменили матрицей J_* (равенство (51)). Последняя имеет совершенно аналогичную структуру, но получается непосредственно из исходной формы модели— без предварительного исключения тождеств. Таким образом, для применения методов Дарбина, Ньютона или трехшагового метода наименьших квадратов достаточно рассмотреть модель непосредственно в ее исходной форме, содержащей тождества.

ГЛАВА 20. ОЦЕНКА ОТДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ ИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Принцип получения оценок при ограниченной информации

Описанные в предыдущей главе методы оценки являются громоздкими, если модели содержат более трех-четырёх уравнений. При посредственной точности данных и лишь весьма грубом отражении реальных явлений в модели с полным основанием возникает вопрос, будут ли оправданными такие сложные вычисления.

Поэтому были предприняты попытки найти методы, требующие менее сложных расчетов. Такие методы имели особое значение в первые послевоенные годы, когда были разработаны принципы обработки моделей из систем уравнений, но отсутствовали современные автоматические средства вычислений. Для упрощения расчетов был повсеместно принят метод, заключающийся в том, что для оценки каждого структурного уравнения пренебрегают ограничениями, налагаемыми на коэффициенты других уравнений. Так, приходят к оценкам, теоретически менее эффективным по сравнению с рассмотренными в предыдущей главе, но обладающим такими же свойствами состоятельности.

При таком подходе уравнения модели не оценивают одновременно, а последовательно рассматривают каждое из ее n структурных уравнений. Для оценки i -го структурного уравнения учитывают, что, с одной стороны, эндогенные переменные x_{it} зависят от экзогенных переменных z_{jt} в соответствии с отношением типа:

$$x_t = Az_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

а с другой стороны, что коэффициенты, относящиеся к некоторым переменным в этом уравнении, необходимо равны нулю. Таким образом, на каждом этапе учитываются априорные ограничения, влияющие на решаемое уравнение, и не учитываются никакие другие ограничения. Поэтому основанные на таком принципе процедуры называются методами с *ограничением информации*. Для оценки i -го структурного уравнения не используются знания о коэффициентах других уравнений. Так, в неявном виде получают n различных оценок матрицы A , каж-

дая из которых является совместимой с ограничениями, относящимися к отдельному структурному уравнению¹.

В настоящей главе будет принята эта точка зрения². Таким образом, мы будем рассматривать соотношение, отдельно взятое из модели с ошибками в уравнениях, включающей в целом n эндогенных и m экзогенных переменных. Действительно, мы уже видели в гл. 16, что модели из систем уравнений часто вводятся для того, чтобы получить возможность правильно оценить одно-единственное соотношение.

При использовании принципа ограниченной информации достаточно специфицировать оцениваемое структурное уравнение, выделить в нем экзогенные и эндогенные переменные и указать, какие другие экзогенные переменные должны входить в модель для полного определения эндогенных переменных. (Очевидно, необходимо уточнить также гипотезы относительно ошибок ε_{it} .) При этом нет необходимости учитывать другие эндогенные переменные, входящие в полную модель.

Учитывая это замечание, и для упрощения обозначений будем считать, что модель содержит только n эндогенных переменных рассматриваемого структурного закона. Среди m экзогенных переменных z_{jt} будем отличать m_1 переменных, входящих в уравнение (которые обозначим через r_{jt}) и $m_2 = m - m_1$ переменных, не входящих в него (или s_{jt}). В этом случае приведенную форму можно записать:

$$x_t = A_r r_t + A_s s_t + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где, очевидно, $A = [A_r, A_s]$. Структурное уравнение, оценку которого нужно получить, будет иметь вид:

$$b'x_t + c'r_t = \eta_t, \quad (3)$$

где b_i и c_j — числовые коэффициенты и η_t — случайная ошибка³.

Проблема сводится к оценке A_r , A_s , b и c при условиях:

$$b'A_r = -c'; \quad b'A_s = 0. \quad (4)$$

Для оценки приведенной формы (2) достаточно учесть, что максимальный ранг матрицы A_s равен $n - 1$.

По правилу идентификации структурное уравнение (3) идентифицируемо только в том случае, если $m_2 \geq n - 1$. Кроме того, оценка не представляет никаких затруднений, если $m_2 = n - 1$. Любая матрица A_s из n строк и m_2 столбцов в этом случае необходимо имеет ранг, меньший чем n , так что для приведенной формы не существует никаких ограничений. Оценки b и c можно получить с помощью косвенной регрессии.

¹ Как было показано в предыдущей главе, оценки с ограниченной информацией интересны не только как конечный результат. Они могут также служить исходными значениями для итерационного расчета оценок с полной информацией.

² Рассматриваемые ниже оценки получаются из оценок, изученных в гл. 9, посвященной нелинейным регрессиям. В работах [346], [68] показано, как на основе принципа ограниченной информации могут быть построены байесовские оценки.

³ Таким образом, мы ограничиваемся случаем, когда на уравнение наложены только исключающие ограничения. В § 4 (5) коротко рассмотрим несколько более общий случай, когда ограничения линейны и однородны.

Таким образом, в дальнейшем предполагаем:

$$m_2 \geq n, \quad (5)$$

так что ограничение для A_s будет эффективным. Чтобы обеспечить идентификацию рассматриваемого структурного уравнения, примем следующую гипотезу.

Г и п о т е з а 1. Истинное значение A_s^0 матрицы A_s имеет ранг $n - 1$.

Будем также предполагать, что правило нормализации обязывает вектор (b, c) иметь заданную длину и фиксирует знак элемента b , который должен иметь в истинной структуре ненулевое значение. (См. ниже несколько отличающееся правило, связанное с формулой (14).)

При таких условиях гипотезы 1—4 из предыдущей главы будут удовлетворяться, если заменить в них везде пару матриц (B, C) парой векторов (b, c) . В соответствии с гипотезой 1 гл. 19 вектор (b, c) принадлежит компактному множеству. В силу гипотезы 2 никакая пара (b, c) , кроме пары истинных значений (b^0, c^0) , не удовлетворяет правилу нормализации и условиям $b'A^0 + c' = 0$ и $b'A_s^0 = 0$. Априорные ограничения и правило нормализации удовлетворяют гипотезе 4. (Нужно учитывать только ограничения, устанавливающие, что коэффициенты при s_{jt} в одном из структурных уравнений равны нулю.)

Проверка справедливости гипотезы 3 несколько сложнее. Необходимо исследовать, ограничено ли отношение между расстояниями:

$$\|A - A^0\| \text{ и } \|(b, c) - (b^0, c^0)\|$$

снизу положительным числом. Для этого рассмотрим следующие расстояния:

$$\begin{aligned} \|A - A^0\| &= \max_{ij} |a_{ij} - a_{ij}^0|, \quad \|b - b^0\| = \max_i |b_i - b_i^0|, \\ \|c - c^0\| &= \max_j |c_j - c_j^0|, \\ \|(b, c) - (b^0, c^0)\| &= \max \{\|b - b^0\|, \|c - c^0\|\}. \end{aligned}$$

Первое равенство системы (4) позволяет записать:

$$(c - c^0)' = b' (A_r^0 - A_r) + (b^0 - b)' A_r^0,$$

откуда можно непосредственно вывести:

$$\|c - c^0\| \leq \lambda \|A_r - A_r^0\| + \mu \|b - b^0\|, \quad (6)$$

$$\text{где } \lambda = n \|b\| > 0 \text{ и } \mu = n \|A_r^0\| \geq 0.$$

К тому же в окрестности b^0 можно записать:

$$n \|b\| \cdot \|A_s - A_s^0\| \geq \|b' (A_s - A_s^0)\| = \|(b - b^0)' A_s^0\| \geq \nu \|b - b^0\|,$$

где ν — положительное число. Действительно, это равенство вытекает непосредственно из второго равенства системы (4), а последнее нера-

венство — из того, что A_s^0 имеет ранг $n - 1$ и из того, что b^0 ортогонально, $b - b^0$ в окрестности b^0 . Следовательно,

$$\|b - b^0\| \leq \sigma \|A_s - A_s^0\|, \quad (7)$$

$$\text{где } \sigma = \frac{n}{v} \|b\| > 0.$$

Используя (7) в (6), получаем непосредственно:

$$\|c - c^0\| \leq \tau \|A - A^0\|, \quad (8)$$

где $\tau = \lambda + \mu\sigma > 0$.

Необходимо доказать, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что в окрестностях (b^0, c^0)

$$\|A - A^0\| \geq \varepsilon \|(b, c) - (b^0, c^0)\|. \quad (9)$$

Но:

1) если $\|c - c^0\| \geq \|b - b^0\|$, это непосредственно вытекает из неравенства (8) при $\varepsilon = 1/\tau > 0$;

2) если $\|b - b^0\| \geq \|c - c^0\|$, неравенство (9) вытекает непосредственно из неравенства (7) при $\varepsilon = 1/\sigma > 0$.

Наконец, для ошибок ε_t и экзогенных переменных принимаем обычные гипотезы.

Гипотеза 2. Векторы ε_t независимы друг от друга и все имеют одинаковое распределение с нулевым математическим ожиданием и невырожденной ковариационной матрицей Ω .

Гипотеза 3. Векторы z_t ограничены. Матрица M_{zz} невырождена. При неограниченном увеличении T она стремится к невырожденной матрице.

2. Оценки по минимальному расстоянию для уравнения без экзогенных переменных

1) Вычисления оценок

Вышеизложенные гипотезы 1 и 2 предполагают справедливость гипотез 1—6 из предыдущей главы. Таким образом, некоторые оценки по минимальному расстоянию обладают интересующими нас свойствами при оценке b и c . Необходимо определить и изучить свойства этих оценок в рамках рассматриваемой проблемы.

Рассмотрим вначале случай, когда оцениваемое уравнение не содержит экзогенных переменных ($m_1 = 0$). Модель в этом случае можно записать:

$$x_t = Az_t + \varepsilon_t, \quad (10)$$

при ограничении

$$b'A = 0. \quad (11)$$

Исследуемое структурное уравнение будет иметь вид:

$$b'x_t = \eta_t. \quad (12)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $m \geq n$ и матрица A^0 имеет ранг $n - 1$.

Необходимы формулы, с помощью которых можно рассчитать определенные в предыдущей главе оценки A^{**} и b^{**} . Пусть в этом случае A^* — матрица коэффициентов регрессии эндогенных переменных по экзогенным; пусть $M_{\varepsilon\varepsilon}$ — матрица моментов эмпирических ошибок $\varepsilon_t^* = x_t - A^*z_t$ (во избежание усложнений обозначений в этой главе звездочка при написании $M_{\varepsilon\varepsilon}^*$ опускается). Будем искать матрицу A^{**} и вектор b^{**} , которые минимизируют:

$$\text{tr} [(A - A^*)' M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (A - A^{**}) M_{zz}] \quad (13)$$

при ограничении (11).

В качестве правила нормализации примем:

$$b' M_{\varepsilon\varepsilon} b = 1 \quad (14)$$

и, допустив, что коэффициент при первой эндогенной переменной в истинном структурном уравнении не равен нулю, предположим, чтобы b было положительным.

Это правило отличается от использовавшихся до сих пор, так как оно зависит от значений ошибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$. Асимптотически оно, очевидно, эквивалентно правилу $b' \Omega b = 1$, которое не зависит от ε_t ; кроме того, равенство (14) значительно облегчает расчеты.

Для минимизации (13) зафиксируем сначала значение b , найдем матрицу A , минимизирующую (13) при этом значении b . Полученный минимум выразим как функцию b . Наконец, определим вектор b^{**} , позволяющий получить минимум этого выражения. Расчеты будут сходны с теми, которые выполнялись при применении взвешенной регрессии к моделям с ошибками в переменных.

а) *Случай, когда b известно.* Требуется найти минимум выражения (13) при ограничении (14). Вводя множители Лагранжа ($2\lambda_j$) и дифференцируя по a_{ij} , получаем необходимое условие:

$$[M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (A - A^*) M_{zz}]_{ij} - \lambda_j b_i = 0.$$

Оно выражается в матричной форме:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (A - A^*) M_{zz} - b \lambda' = 0. \quad (15)$$

Умножая левое выражение на $b' M_{\varepsilon\varepsilon}$ и учитывая (14), получаем:

$$-b' A^* M_{zz} = \lambda',$$

откуда, подставляя в (15), находим:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (A - A^*) + b b' A^* = 0 \quad (16)$$

и в конечном итоге A^{**} определяется из

$$A^{**} = (I - M_{\varepsilon\varepsilon} b b') A^*. \quad (17)$$

Подставляя (16) в (13), получаем минимум квадратичной формы:

$$\text{tr} [A^{**'} b b' M_{\varepsilon\varepsilon} b b' A^* M_{zz}],$$

который будет равен:

$$b' A^* M_{zz} A^{**'} b. \quad (18)$$

б) *Случай, когда b неизвестно.* Теперь нужно определить b так, чтобы минимизировать (18) при условии нормализации (14). Если через μ обозначить множитель Лагранжа, необходимо, чтобы

$$(A^* M_{zz} A^{*'} - \mu M_{\varepsilon\varepsilon}) b = 0 \quad (19)$$

и, следовательно,

$$|A^* M_{zz} A^{*'} - \mu M_{\varepsilon\varepsilon}| = 0. \quad (20)$$

Кроме того, μ должно быть наименьшим корнем этого уравнения, поскольку в соответствии с (19) и (14) μ строго равно (18).

Таким образом, вычисления сводятся к следующему:

пренебрегая априорными ограничениями, определяется A^* с помощью метода наименьших квадратов;

находится наименьший корень в μ для уравнения (20);

решается относительно b система, составленная из (14) и уравнений (19).

К решению этой проблемы можно привлечь принцип *оценки квази-максимального правдоподобия*. Как показали Т. Андерсон и Х. Рубин [13], в таком случае мы пришли бы к *точно такой же* оценке для b . Точнее, учитывая правило нормализации (14), оценками квазимаксимального правдоподобия b , A и Ω будут соответственно¹:

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= b^{**}, \\ \hat{A} &= [I - M_{\varepsilon\varepsilon} \hat{b} \hat{b}'] A^*, \\ \hat{\Omega} &= M_{\varepsilon\varepsilon} + \mu M_{\varepsilon\varepsilon} \hat{b} \hat{b}' M_{\varepsilon\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где μ — наименьший корень уравнения (20).

2) Ковариационная матрица оценок

Пусть \hat{b}^0 — истинное значение вектора b , нормализованного на основе равенства (14); как и $M_{\varepsilon\varepsilon}$, вектор \hat{b}^0 случайный, но будет расположен над постоянной прямой. Нужно отличать его от b^0 — вектора истинного значения b , нормализованного с помощью $b' \Omega b = 1$. Известно, что при соблюдении гипотез 1 и 2 $\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0)$ имеет нормальное предельное распределение, и b^{**} будет асимптотически эффективным при нормальном распределении ε_t . Остается определить асимптотический характеристический эллипсоид $\sqrt{T} \times (b^{**} - \hat{b}^0)$, чтобы получить представление о точности, с которой b^{**} оценивает b^0 , и построить для b^0 асимптотически действенные критерии.

Для этого можно использовать установленное в гл. 9, § 5 свойство, согласно которому асимптотический характеристический эллипсоид $\sqrt{T} (A^{**} - A^0)$ строится как пересечение характеристического эллипсоида $\sqrt{T} (A^* - A^0)$ с линейным подпространством H_0 , параллельным гиперплоскости матриц, удовлетворяющих априорным ограничениям в окрестности A^0 .

¹ Эти результаты можно получить непосредственно, изучая итеративный метод, описанный в конце § 2, гл. 9. Действительно, можно заметить, что итеративный процесс останавливается на второй итерации после получения оценок, определяемых системой (21).

Матрицы ранга $n - 1$ зависят от $(n - 1)(m + 1)$ параметров: от $n - 1$ параметра, независимых от нормализованного вектора b , и $(n - 1)m$ параметров, независимых от матриц, удовлетворяющих $b'A = 0$ для заданного значения b . В частности, удовлетворяющие $b^{0'} A = 0$ матрицы определяют линейное подпространство K_0 размерности $(n - 1)m$, принадлежащее H_0 .

Так как нас интересует только распределение b^{**} и не интересует распределение $(n - 1)m$ прочих параметров, от которых зависит A^{**} , нужно найти отображение матриц H_0 , которое позволит непосредственно рассмотреть частное распределение b^{**} .

Можно использовать простой метод, заключающийся в определении в H_0 линейного подпространства L_0 , сопряженного с K_0 относительно характеристического эллипсоида $\sqrt{T}(A^* - A^0)$. Любую матрицу из H_0 можно записать как сумму двух матриц, одна из которых, A_K , принадлежит K_0 , другая, A_L , принадлежит L_0 .

Такое разложение, в частности, можно применить к матрице из H_0 , которая граничит с

$$\sqrt{T}(A^{**} - A^0).$$

Характеристический эллипсоид компоненты A_L будет определять асимптотические моменты второго порядка:

$$\sqrt{T}(b^{**} - \hat{b}^0),$$

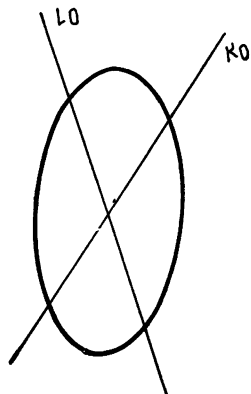


Рис. 1

так как две матрицы имеют одну и ту же компоненту в L_0 в том и только в том случае, если они соответствуют одинаковому значению вектора b . Таким образом, непосредственно выводится асимптотический характеристический эллипсоид $\sqrt{T}(b^{**} - \hat{b}^0)$ из пересечения L_0 и характеристического эллипсоида $\sqrt{T}(A^* - A^0)$ (см. рис. 1).

Можно удостовериться, что матрицы A_L должны иметь форму:

$$A_L = \Omega b^0 d' A^0, \quad (22)$$

где вектор d должен удовлетворять только

$$d' \Omega b^0 = 0. \quad (23)$$

Действительно,

1) Матрицы $(A^0 + A_L)$ имеют ранг $n - 1$, так как

$$(b^0 - d')(A^0 + A_L) = (b^{0'} \Omega b^0) d' A^0 - d' A^0 - (d' \Omega b^0) d' A^0 = 0.$$

2) Характеристический эллипсоид $\sqrt{T}(A^* - A^0)$ составлен множеством матриц A , таких, что

$$\text{tr}[M_{zz} A' \Omega^{-1} A] \leq 1$$

и каждая матрица A_L сопряжена с каждой матрицей A_K , такой, что $b^{0'} A_K = 0$, так как

$$\text{tr} [M_{zz} A_K' \Omega^{-1} A_L] = \text{tr} [M_{zz} (A_K' b^0) d' A^0] = 0.$$

Таким образом, пересечение характеристического эллипсоида $\sqrt{T} (A^* - A^0)$ и L_0 содержит множество матриц A_L , имеющих форму (22), где вектор d удовлетворяет (23) и

$$\text{tr} [M_{zz} A^{0'} d d' A^0] \leq 1,$$

что можно также записать:

$$d' A^0 M_{zz} A^{0'} d \leq 1. \quad (24)$$

Поскольку

$$(b^0 - d')(A^0 + A_L) = 0,$$

вектор d будет сопряжен с вектором

$$\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0),$$

если матрица A_L сопряжена с матрицей

$$-\sqrt{T} (A^{**} - A^0).$$

Кроме того, связь между A_L и d линейна. Таким образом, асимптотический характеристический эллипсоид

$$\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0)$$

содержит множество векторов d , удовлетворяющих (23) и (24).

Этот эллипсоид зависит от неизвестных A^0 , b^0 и Ω . Но их оценки можно получить, используя A^{**} , b^{**} и M_{ee} . Оценка эллипсоида получается на основе множества векторов d , таких, что

$$\left. \begin{aligned} d' A^{**} M_{zz} A^{**'} d &\leq 1, \\ d' M_{ee} b^{**} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая формулу (17) и вышеприведенное равенство, неравенство можно также записать:

$$d' A^* M_{zz} A^{*'} d \leq 1.$$

В соответствии с общими формулами теории множественных регрессий:

$$A^* M_{zz} A^{*'} = M_{xx} - M_{ee}.$$

Таким образом, оценку асимптотического характеристического эллипсоида

$$\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0)$$

можно получить на основе множества векторов d , таких, что

$$\left. \begin{aligned} d' (M_{xx} - M_{ee}) d &\leq 1, \\ d' M_{ee} b^{**} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Используя предложение 1 гл. 5, выводим отсюда следующую оценку асимптотической ковариационной матрицы $\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0)$:

$$Qb^{**} = (M_{xx} - M_{ee})^{-1} (I - N^{**}), \quad (26)$$

где

$$N^{**} = \frac{M_{ee} b^{**} b^{**'} M_{ee} (M_{xx} - M_{ee})^{-1}}{b^{**'} M_{ee} (M_{xx} - M_{ee})^{-1} M_{ee} b^{**}}. \quad (27)$$

3) Доверительные области и критерий переопределения

В силу полученных выше результатов

$$\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0)$$

имеет асимптотически нормальное, центральное, $(n - 1)$ -мерное распределение с известным характеристическим эллипсоидом. Отсюда следует, что

$$T (b^{**} - \hat{b}^0)' A^0 M_{zz} A^{0'} (b^{**} - \hat{b}^0)$$

имеет асимптотическое распределение χ^2 с $n - 1$ степенями свободы. Так как

$$A^{**} M_{zz} A^{**'}$$

стремится по вероятности к $A^0 M_{zz} A^{0'}$,

$$T (b^{**} - \hat{b}^0)' A^{**} M_{zz} A^{**'} (b^{**} - \hat{b}^0) \quad (28)$$

также имеет асимптотическое распределение χ^2 с $n - 1$ степенями свободы. Но выражение (28) можно записать:

$$T \hat{b}^{0'} A^{**} M_{zz} A^{**'} \hat{b}^0. \quad (29)$$

Таким образом, для истинного значения \hat{b}_0 , нормализованного по правилу $b' M_{ee} b = 1$, можно непосредственно установить доверительную область:

$$T \hat{b}^{0'} A^{**} M_{zz} A^{**'} \hat{b}^0 \leq \chi_{n-1}^2(\alpha), \quad (30)$$

где $\chi_{n-1}^2(\alpha)$ — значение, соответствующее уровню значимости α для переменной χ^2 с $n - 1$ степенями свободы.

При нормальном распределении ошибок можно обосновать аналогичную доверительную область даже для малых выборок.

Известно, что вектор ошибок ε_i^* и оценка A^* при прямом применении метода наименьших квадратов имеют нормальные независимые распределения размерности соответственно n ($T - m$) и mt . Следовательно, вектор $b^{0'} \varepsilon_i^*$ и вектор $b^{0'} A^*$ имеют нормальные, центральные, независимые распределения размерностей $T - m$ и m . Если же вектор b^0 нормализован по правилу $b' \Omega b = 1$, то $b^{0'} M_{ee} b^0$ и $b^{0'} A^* M_{zz} A^{*'} b^0$ имеют независимые распределения χ^2 с $T - m$ и m степенями свободы. Отношение второго выражения к первому равно

$$\hat{b}^{0'} A^* M_{zz} A^{*'} \hat{b}^0.$$

Следовательно,

$$\hat{b}^{0'} A^* M_{zz} A^{*'} \hat{b}^0 \leq \frac{m}{T-m} F_{m, T-m}(\alpha) \quad (31)$$

определяет доверительную область для истинного вектора, нормализованного по правилу $b' M_{ee} b = 1$, где $F_{m, T-m}(\alpha)$ — переменная Фишера при m и $T-m$ степенях свободы и уровне значимости α .

Наконец, можно довольно просто проверить основную гипотезу модели, позволяющую определить, имеет ли матрица A^0 ранг, меньший n , т. е. существует ли структурное уравнение, в которое не входит ни одна из экзогенных переменных. В этом случае обычно говорят о критерии переопределения (*сверхидентификации*).

Действительно, наименьший корень уравнения (20) $\bar{\mu}$ равен минимуму выражения (13). Асимптотическое распределение $T\bar{\mu}$, если проверяемая гипотеза верна, является распределением χ^2 с $m-n+1$ степенями свободы. Чтобы в этом убедиться, до-

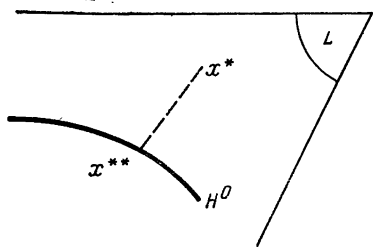


Рис. 2

статочно применить подход гл. 9. $T\bar{\mu}$ равно соответствующему расстоянию между вектором — проекцией x^* , полученным на основе метода наименьших квадратов, и вектором x^{**} , соответствующим проекции x^* , на подпространство H^0 , соответствующее матрицам ранга меньше n .

В пределе

$$\sqrt{T}(x^* - x^{**})$$

стремится к вектору, принадлежащему линейному подпространству размерности $nm - [(n-1)(m+1)] = m - n + 1$.

В целом значение $T\bar{\mu}$ принимается существенно отличным от нуля, если оно превышает $\chi^2_{m-n+1}(\alpha)$. (Чтобы учесть систематическую ошибку, которую содержит M_{ee} как оценка Ω , можно вместо $T\bar{\mu}$ рассматривать $(T-m)\bar{\mu}$.)

3. Метод Комиссии Коулса

Вернемся к общей проблеме оценки уравнения:

$$b' x_t + c' r_t = \eta_t \quad (3)$$

в модели:

$$x_t = A_r r_t + A_s s_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Единственное учитываемое ограничение предполагает:

$$b' \mathbf{1}_s = 0. \quad (4)$$

Оно состоятельно в смысле идентифицируемости, если, как мы будем предполагать и в дальнейшем, число экзогенных переменных, не вхо-

дящих в уравнение (3), m_2 — по меньшей мере равно числу эндогенных переменных n .

Для оценки b и c применим те же принципы, которые были использованы ранее для случая $m_1 = 0$. В результате будут получены оценки b^{**} и c^{**} , которые впервые были найдены сотрудниками «Комиссии Коулса для экономических исследований» [179], [151].

Оценки b^{**} и c^{**} были получены исследованием функций максимума правдоподобия при гипотезе, что векторы ε_t независимы друг от друга и имеют одно и то же нормальное распределение. Они называются *оценками максимального правдоподобия с ограниченной информацией*, или, если гипотеза нормальности представляется сомнительной, «оценками квазимаксимума правдоподобия с ограниченной информацией». Мы будем называть их «оценками Комиссии Коулса».

Относительно свойств b^{**} и c^{**} см. [13], [14].

Для определения b^{**} и c^{**} находим матрицу

$$A^{**} = [A_r^{**} A_s^{**}],$$

минимизирующую выражение (13) при условии, что ранг A_s^{**} не превышает $n - 1$. Если две группы экзогенных переменных, составляющих соответственно r_t и s_t , ортогональны, вычисление A^{**} будет относительно простым. Действительно, минимизируемое выражение (13) в этом случае можно записать:

$$\text{tr}[(A_r - A_r^*) M_{rr} (A_r - A_r^*)' M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}] + \text{tr}[(A_s - A_s^*) M_{ss} (A_s - A_s^*)' M_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}].$$

При таких условиях $A_r^{**} = A_r^*$; матрицу A_s^{**} , минимизирующую второй член, можно рассчитать с помощью описанного в предыдущем параграфе метода, если M_{ss} заменить на M_{zz} .

Это достигается заменой вектора s_t векторами:

$$w_t = s_t - M_{sr} M_{rr}^{-1} r_t,$$

так что M_{rw} будет необходимо равна нулю. Приведенная форма:

$$x_t = A_r r_t + A_s s_t + \varepsilon_t$$

должна быть заменена соотношением:

$$x_t = A_v r_t + A_w w_t + \varepsilon_t, \quad (32)$$

где $A_v = A_r + A_s M_{sr} M_{rr}^{-1}$ и $A_w = A_s$.

Условия $b'A_r + c' = 0$ и $b'A_s = 0$ принимают вид:

$$b'A_v + c' = 0 \text{ и } b'A_w = 0.$$

Кроме того, вследствие ортогональности переменных r_{jt} и w_{ht} выравнивание по методу наименьших квадратов для приведенной формы (32) будет очень простым. Матрицы A_v^* и A_w^* определяются из

$$A_v^* = M_{xr} M_{rr}^{-1} \text{ и } A_w^* = M_{xw} M_{ww}^{-1}.$$

В целом оценки Комиссии Коулса b^{**} и c^{**} получаются с помощью следующих операций.

1) Рассчитываются:

$$M_{xx}, M_{xr}, M_{xs}, M_{rr}, M_{rs}, M_{ss}.$$

2) Определяются:

$$A_v^* = M_{xr} M_{rr}^{-1}.$$

3) Вычисляются:

$$M_{xw} = M_{xs} - M_{xr} M_{rr}^{-1} M_{rs} \text{ и } M_{ww} = M_{ss} - M_{sr} M_{rr}^{-1} M_{rs}.$$

4) Оцениваются:

$$A_w^* M_{ww} A_w^* = M_{xw} M_{ww}^{-1} M_{wx}.$$

5) Рассчитываются:

$$M_{ee} = M_{xx} - M_{xr} M_{rr}^{-1} M_{rx} - M_{xw} M_{ww}^{-1} M_{wx}.$$

6) Находится: $\bar{\mu}$, наименьший корень уравнения ¹:

$$|A_w^* M_{ww} A_w^{*'} - \mu M_{ee}| = 0. \quad (33)$$

7) Оценивается b^{**} из системы:

$$\left. \begin{aligned} (A_w^* M_{ww} A_w^{*'} - \bar{\mu} M_{ee}) b^{**} &= 0, \\ b^{**'} M_{ee} b^{**} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

8) Находится:

$$c^{**} = -A_v^{*'} b^{**}. \quad (35)$$

Трудоемкость этих расчетов зависит, очевидно, от числа эндогенных и экзогенных переменных. Обращение матриц M_{rr} и M_{ww} в настоящее время легко выполняется с помощью электронно-вычислительных машин. В самом распространенном случае, когда m_1 и m_2 не превышают 3 или 4, вычисление обратных матриц можно достаточно быстро выполнить с помощью обычных счетных машин. Вычисление $\bar{\mu}$ будет быстрым, если рассматриваемое уравнение содержит только две эндогенные переменные. Наоборот, оно становится самой трудоемкой операцией, если число эндогенных переменных достигает 4 или 5.

Для определения асимптотических дисперсий и ковариации b^{**} и c^{**} можно обратиться к формулам предыдущего параграфа.

Так как две группы экзогенных переменных, представленных соответственно r_t и w_t , ортогональны, матрицы A_v^* , A_w^* и M_{ee} не коррелируют между собой. Отсюда следует, что A_v^* не коррелирует с b^{**} . Если известны Q_b и асимптотическая ковариационная матрица

$$\sqrt{T} (b^{**} - \hat{b}^0),$$

¹ Можно заметить, что $M_{ee} + A_w^* M_{ww} A_w^{*'}$ является ковариационной матрицей эмпирических ошибок регрессии x_{it} по одним только r_{jt} . Если обозначить эту матрицу через $M_{\rho\rho}$, уравнение (33) можно записать как $|M_{\rho\rho} - (\mu + 1) M_{ee}| = 0$. Вместо вычислений вышеуказанным способом можно рассчитать $M_{\rho\rho}$ на основе M_{xx} , M_{xr} , M_{rr} и M_{ee} на основе M_{xx} , M_{xz} , M_{zz} , не используя ортогональные переменные w и соответствующие им матрицы. Действительно, M_{ee} является ковариационной матрицей эмпирических ошибок регрессий x_{it} по совокупности всех экзогенных переменных z_{jt} .

можно рассчитать остальные асимптотические ковариации пары

$$[\sqrt{T}(b^{**} - \hat{b}^0), \sqrt{T}(c^{**} - \hat{c}^0)],$$

где пара (\hat{b}^0, \hat{c}^0) обозначает истинное значение (b, c) нормализованного по правилу

$$b' M_{\varepsilon\varepsilon} b = 1.$$

Для простоты обозначений положим:

$$\delta b = \sqrt{T}(b^{**} - \hat{b}^0);$$

$$\delta c = \sqrt{T}(c^{**} - \hat{c}^0);$$

$$\delta A_v = \sqrt{T}(A_v^* - A_v^0).$$

Вектор δc имеет то же асимптотическое распределение, что и

$$-A_v^{*'} \delta b - \delta A_v' \cdot b^{**}.$$

Следовательно, мы можем записать:

$$\left. \begin{aligned} E[\delta c \cdot \delta b'] &\sim -A_v^{*'} E[\delta b \cdot \delta b'] = -A_v^{*'} Q_b, \\ E[\delta c \cdot \delta c'] &\sim A_v^{*'} E[\delta b \cdot \delta b'] A_v^0 + E[\delta A_v' b^{**} b^{**'} \delta A_v]. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Предельное значение последнего математического ожидания легко рассчитать. Поскольку b^{**} стремится к b^0 , элемент (j, g) матрицы

$$E[\delta A_v' b^{**} b^{**'} \delta A_v]$$

будет эквивалентен

$$\sum_{hk} b_h^0 b_k^0 E[(\delta A_v)_{hj} (\delta A_v)_{kg}]. \quad (37)$$

Из теории множественных регрессий известно, что математическое ожидание, входящее в это последнее выражение, равно $w_{hk} (M_{rr}^{-1})_{jg}$. С учетом правила нормализации (37) сводится к $(M_{rr}^{-1})_{jg}$.

В целом асимптотические ковариационные матрицы находятся из формул:

$$\left. \begin{aligned} E[\delta b \cdot \delta b'] &\sim Q_b, \\ E[\delta c \cdot \delta b'] &\sim -A_v^{*'} Q_b, \\ E[\delta c \cdot \delta c'] &\sim A_v^{*'} Q_b A_v^0 + M_{rr}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Матрица Q_b определяется на основе характеристического эллипсоида

$$\sqrt{T}(b^{**} - \hat{b}^0),$$

который задается формулами (23) и (24), где M_{zz} заменяется на M_{ww} .

Для получения оценок этих асимптотических ковариаций можно в формулах (38) заменить A_v^0 матрицей A_v^* и Q_b матрицей

$$Q_b^{**} = (A_w^* M_{ww} A_w^{*'})^{-1} (I - N^{**}), \quad (39)$$

где N^{**} определяется из формулы (27).

Эти формулы применяются в случае, когда b^{**} и c^{**} нормализованы по правилу $b'M_{ee}b = 1$. Часто коэффициенту при эндогенной переменной, определяемой уравнением в приводимых результатах, придается значение 1. В этом случае можно использовать метод гл. 17, § 1 для нахождения оценок асимптотических дисперсий вычисленных отношений, например, для выражения:

$$V\bar{T}\left(\frac{b_i^{**}}{b_1^{**}} - \frac{b_i^0}{b_1^0}\right).$$

Действительно, в следующем параграфе будет приведен более простой способ вычислений оценок асимптотических дисперсий и ковариаций нормализованных таким образом коэффициентов.

Приведенный в предыдущем параграфе *критерий переопределения (сверхидентификации)* также можно непосредственно применить в данном случае. Он позволяет судить о справедливости гипотезы, согласно которой экзогенные переменные s_{jt} не входят в рассматриваемое структурное уравнение.

4. Двухшаговый метод наименьших квадратов ¹

1) Оценки класса k

Применение метода Комиссии Коулса в процессе конкретного моделирования сопровождается слишком большим объемом вычислительных операций. Существует более простой метод, дающий оценки с теми же асимптотическими свойствами. С этой процедурой, называемой «двухшаговым методом наименьших квадратов», мы уже ознакомились в гл. 17, § 3. Здесь он будет изложен более систематически.

Этот метод выравнивания был разработан Г. Тейлом в 1955 г. и описан, например, в работе [291]. Независимо от него Р. Басман [22] определил те же оценки, используя другой подход. Мы будем придерживаться логики рассуждений Тейла и покажем, что оценивание по двухшаговому методу наименьших квадратов принадлежит к классу методов асимптотически эквивалентных методу Комиссии Коулса.

В предыдущем параграфе мы придерживались правила нормализации $b'M_{ee}b = 1$. Теперь предположим, что коэффициент при определенной эндогенной переменной в рассматриваемом уравнении, например коэффициент при переменной, определяемой отражаемым в уравнении законом поведения, имеет фиксированное значение — 1. Допустим, что значение коэффициента при первой переменной удовлетворяет этому правилу.

Введем для дальнейшего более удобное обозначение и выделим первую эндогенную переменную x_{1t} , которую обозначим через p_t , а через q_t — вектор $n - 1$ последних компонент x_t . Запишем:

$$x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ d \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix},$$

¹ По-английски «Two-stage least squares».

где p_t и ξ_t — числовые переменные, q_t , d и ξ_t — векторы с $n - 1$ компонентами. Рассматриваемое уравнение будет иметь вид:

$$p_t = d' q_t + c' r_t - \eta_t.$$

Теперь необходимо преобразовать уравнения (34) и (35), определяющие оценки b^{**} и c^{**} Комиссии Коулса так, чтобы ввести в них новое правило нормализации и новые обозначения.

Заметим сначала, что

$$A_w^* M_{ww} A_w^{*'} = M_{xw} M_{ww}^{-1} M_{wx} = M_{xx} - M_{\varepsilon\varepsilon} - M_{xr} M_{rr}^{-1} M_{rx}. \quad (40)$$

Отношения (34) и (35) теперь можно записать:

$$[M_{xx} - M_{xr} M_{rr}^{-1} M_{rx} - (1 + \bar{\mu}) M_{\varepsilon\varepsilon}] b^{**} = 0,$$

$$M_{rr}^{-1} M_{rx} b^{**} + c^{**} = 0.$$

Умножив второе отношение на M_{xr} и прибавив его к первому, получим:

$$[M_{xx} - (1 + \bar{\mu}) M_{\varepsilon\varepsilon}] b^{**} + M_{xr} c^{**} = 0.$$

Умножив второе отношение на M_{rr} , найдем:

$$M_{rx} b^{**} + M_{rr} c^{**} = 0,$$

откуда получаем систему:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} - (1 + \bar{\mu}) M_{\varepsilon\varepsilon} & M_{xr} \\ M_{rx} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{**} \\ c^{**} \end{bmatrix} = 0. \quad (41)$$

Эти отношения являются однородными и их необходимо дополнить правилом нормализации. Обозначим через (\hat{b}, \hat{c}) пару, пропорциональную (b^{**}, c^{**}) и нормализованную по правилу $b_1 = -1$. Запишем также M_{xx} в форме:

$$M_{xx} = \begin{bmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{bmatrix}.$$

Замена переменных в уравнениях системы (41), кроме первого, приводит к системе:

$$\begin{bmatrix} M_{qq} - (1 + \bar{\mu}) M_{\xi\xi} & M_{qr} \\ M_{rq} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{qp} - (1 + \bar{\mu}) m_{\xi\xi} \\ m_{rp} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Иначе говоря, метод Комиссии Коулса можно применить, рассчитав сначала наименьший корень (33) — $\bar{\mu}$, а затем решив $n + m_1 - 1$ линейное уравнение системы (42).

Определим теперь новый класс оценок d и c , рассмотрев для произвольного числа « k » решения $d(k)$ и $c(k)$ системы:

$$\begin{bmatrix} M_{qq} - k M_{\xi\xi} & M_{qr} \\ M_{rq} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ c(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{qp} - k m_{\xi\xi} \\ m_{rp} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Очевидно, что $d(1 + \bar{\mu})$ и $c(1 + \bar{\mu})$, получаемые при $k = 1 + \bar{\mu}$, являются оценками по методу Комиссии Коулса. Заметим также, что $d(0)$ и $c(0)$, найденные при $k = 0$, являются оценками метода наименьших квадратов для уравнения:

$$p_t = d'q_t + c'r_t - \eta_t.$$

Действительно, система (43) в этом случае приводит к уравнению:

$$\begin{bmatrix} d(0) \\ c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{qq} & M_{qr} \\ M_{rq} & M_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{qp} \\ m_{rp} \end{bmatrix}.$$

Выясним, не существует ли в классе $d(k)$, $c(k)$ оценок с теми же асимптотическими свойствами, что и

$$[d(1 + \bar{\mu}), c(1 + \bar{\mu})],$$

но которые можно рассчитать более просто. Как отмечалось, оценки по методу наименьших квадратов $d(0)$, $c(0)$ не дают ответа на наш вопрос, поскольку они сходятся к значениям, отличающимся от истинных.

Отношение (43) показывает, что если

$$\sqrt{T}[k - (1 + \bar{\mu})]$$

стремится по вероятности к нулю, то

$$\sqrt{T}[d(k) - d(1 + \bar{\mu})] \text{ и } \sqrt{T}[c(k) - c(1 + \bar{\mu})]$$

также стремятся по вероятности к нулю¹.

¹ Чтобы это установить, достаточно использовать следующее предложение, легко доказуемое путем рассуждений, аналогичных тем, которые были сделаны в приложении к гл. 9.

Предложение. Пусть $f_T(k)$ — случайная функция действительной переменной k .

1) Если существует положительное число h , такое, что вероятность

$$\|f_T(k_1) - f_T(k_2)\| > h |k_1 - k_2|$$

стремится к нулю, каковы бы ни были величины k_1 и k_2 , принадлежащие к закрытому интервалу I .

2) Если u_T — случайная переменная, такая, что $T^\alpha(u_T - k_T)$ для числа $\alpha \geq 0$ и последовательности чисел k_T , меньших I , стремится по вероятности к нулю, то выражение

$$T^\alpha[f_T(u_T) - f_T(k_T)]$$

стремится по вероятности к нулю.

Примем здесь $\alpha = 1/2$, $u_T = 1 + \bar{\mu}$; функция f_T будет той функцией, которая определяет $[d(k), c(k)]$ посредством равенства (43). Можно убедиться в справедливости приведенного выше условия 1), взятого в интервале I , содержащем значение $k = 1$. Необходимо учитывать гипотезы 1, 2 и 3 и то, что $b_1^0 \neq 0$.

Итак, чтобы $[d(k), c(k)]$ имело те же асимптотические свойства, что и $[\hat{d}, \hat{c}]$, достаточно сходимости к нулю

$$\sqrt{T}[k - (1 + \bar{\mu})].$$

Но мы видели, что $T\bar{\mu}$ распределено асимптотически как χ^2 с $m_2 - n + 1$ степенями свободы. Таким образом, корень $\bar{\mu}$ стремится к нулю, так же как $\sqrt{T}\bar{\mu}$. Если при неограниченном увеличении T $\sqrt{T}(k - 1)$ стремится к нулю, оценки $d(k)$ и $c(k)$ будут иметь те же асимптотические свойства, что и $d(1 + \bar{\mu})$ и $c(1 + \bar{\mu})$. На практике достаточно принять $k = 1$, чтобы получить оценки, эквивалентные оценкам Комиссии Коулса¹.

2) Оценки двухшагового метода наименьших квадратов

Существенное преимущество оценок $d(k)$ и $c(k)$ по сравнению с $d(1 + \bar{\mu})$ и $c(1 + \bar{\mu})$ заключается в том, что они не связаны с решением уравнения (33) и позволяют, таким образом, исключить наиболее трудоемкую часть расчетов. Теперь можно показать, что $d(1)$ и $c(1)$ являются именно оценками двухшагового метода наименьших квадратов.

Для упрощения положим $d(1) = \hat{d}$ и $c(1) = \hat{c}$ и перепишем систему (43) заново при $k = 1$.

$$\begin{bmatrix} M_{qq} - M_{\zeta\zeta} & M_{qr} \\ M_{rq} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{qp} - m_{\zeta\zeta} \\ m_{rp} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Пусть теперь q_i^* — расчетные значения q_i , полученные на основе регрессии (по методу наименьших квадратов) эндогенных переменных q_i по экзогенным переменным r_i и s_i . Имеем:

$$q_i^* = M_{qr} M_{rr}^{-1} r_i + M_{qw} M_{ww}^{-1} w_i.$$

Пусть M_{qq}^* , M_{qr}^* , m_{qp}^* — матрицы и вектор, полученные в результате замены q_i в выражениях M_{qq} , M_{qr} , m_{qp} на q_i^* . Легко можно рассчитать:

$$\left. \begin{aligned} M_{qq}^* &= M_{qr} M_{rr}^{-1} M_{rq} + M_{qw} M_{ww}^{-1} M_{wq} = M_{qq} - M_{\zeta\zeta}, \\ M_{qr}^* &= M_{qr}, \text{ так как } M_{wr} = 0 \text{ по определению } w_i, \\ m_{qp}^* &= M_{qr} M_{rr}^{-1} m_{rp} + M_{qw} M_{ww}^{-1} m_{wp} = m_{qp} - m_{\zeta\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

¹ Можно также попытаться принять в качестве k величину

$$1 + \frac{m_2 - n + 1}{T}.$$

Как отметили К. Эрроу и М. Хоффенберг [18], именно для этого значения k величина

$$\sqrt{T}[(1 + \bar{\mu}) - k]$$

имеет нулевое математическое ожидание, так как $T\bar{\mu}$ распределено как χ^2 с $m_2 - n + 1$ степенями свободы. В работе [226] показано, что при этом значении k смещение в оценке d^0 и c^0 на основе $d(k)$ и $c(k)$ будет бесконечно малым с порядком, превышающим порядок $1/T$.

Следовательно, систему (44) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{qq}^* & M_{qr}^* \\ M_{rq}^* & M_{rr}^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{qp}^* \\ m_{rp}^* \end{bmatrix}, \quad (46)$$

т. е. \hat{d} и \hat{c} находятся на основе регрессии p_t по q_t^* и r_t .

Обобщая, можно сказать, что алгоритм вычислений сводится к оцениванию регрессий $n - 1$ эндогенных переменных q_{it} по m экзогенным переменным r_{jt} и s_{jt} , затем регрессии эндогенной переменной p_t по q_t^* и r_t . Разумеется, в практике не определяют значения q_{it}^* , а пользуются первыми равенствами из отношений (45) для получения непосредственно M_{qq}^* , M_{qr}^* и m_{qp}^* .

3) Оценка ковариационной матрицы

Приняв гипотезы 1, 2 и 3 для оценки асимптотических ковариаций, можно было бы использовать формулы:

$$\sqrt{T}(\hat{d} - d^0) \text{ и } \sqrt{T}(\hat{c} - c^0)$$

из предыдущего параграфа. Но проще найти результат непосредственно и вывести формулу, справедливую для правила нормализации $b_1 = -1$, независимо от того, получены оценки с помощью двухшагового метода наименьших квадратов или метода Комиссии Коулса¹.

Для простоты рассмотрим случай, когда оцениваемое уравнение не содержит экзогенных переменных. Оценка \hat{d} получается из выражения:

$$\hat{d} = M_{qq}^{*-1} m_{qp}^*. \quad (47)$$

Можем записать:

$$M_{qq}^* d^0 = m_{qp}^* + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T q_t^* (\eta_t - d^{0'} \zeta_t^*),$$

если $p_t = d^{0'} q_t - \eta_t = d^{0'} q_t^* + d^{0'} \zeta_t^* - \eta_t$.

Так как q_t^* получается методом наименьших квадратов, имеем:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T q_t^* \zeta_t^* = 0.$$

Положим:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T q_t^* \eta_t.$$

Приведенные выше уравнения предполагают:

$$\sqrt{T}(d^0 - \hat{d}) = M_{qq}^{*-1} \lambda. \quad (48)$$

¹ А. Л. Нагар [226] нашел приближенные формулы для математических ожиданий и ковариаций оценок \hat{c} и \hat{d} в выборках конечных размеров. Но эти формулы неудобны в применении, а рассуждения, на которых они основаны, весьма спорны.

При неограниченном возрастании числа наблюдений матрица M_{qq}^* стремится к конечному пределу \bar{M}_{qq}^* . Асимптотическое распределение $\sqrt{T}(\hat{d} - d^0)$ будет в этом случае таким же, что и распределение $\bar{M}_{qq}^{*-1}\lambda$.

С другой стороны, если A_q^0 — матрица истинных коэффициентов в системе приведенных уравнений, из которой определяем q_t , q_t^* , выравненное значение q_t будет стремиться к $A_q^0 z_t$. Таким образом, случайная переменная λ имеет то же асимптотическое распределение, что и

$$\frac{1}{\sqrt{T}} A_q^0 \sum_{t=1}^T z_t \eta_t. \quad (49)$$

Можно непосредственно рассчитать ее асимптотическую ковариационную матрицу

$$\sigma_\eta^2 \cdot A_q^0 \bar{M}_{zz} A_q^{0'},$$

где \bar{M}_{zz} — предел M_{zz} . Легко заметить, что

$$A_q^0 \bar{M}_{zz} A_q^{0'} = \bar{M}_{qq}^*,$$

так как

$$M_{qq}^* = M_{qz} M_{zz}^{-1} M_{zq} = (M_{qz} M_{zz}^{-1}) M_{zz} (M_{qz} M_{zz}^{-1})'.$$

Таким образом, асимптотическая ковариационная матрица $\sqrt{T}(\hat{d} - d^0)$ имеет вид:

$$\sigma_\eta^2 \cdot \bar{M}_{qq}^{*-1}.$$

Ее оценкой является $\hat{\sigma}_\eta^2 \cdot M_{qq}^{*-1}$, где значение $\hat{\sigma}_\eta^2$ можно получить либо непосредственно из отклонений от оцененного уравнения, либо из отклонений от приведенных уравнений, т. е.

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = 2\hat{d}' m_{\xi\xi} + \hat{d}' M_{\xi\xi} \hat{d}.$$

В общем случае в рассматриваемое уравнение входят экзогенные переменные. Тогда оценкой асимптотической ковариационной матрицы

$$\sqrt{T}(\hat{d} - d^0) \text{ и } \sqrt{T}(\hat{c} - c^0)$$

будет:

$$\hat{\sigma}_\eta^2 \begin{bmatrix} M_{qq}^* & M_{qr} \\ M_{rq} & M_{rr} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (50)$$

4) Критерий переопределения (сверхидентификации)

Оценки по двухшаговому методу наименьших квадратов асимптотически эквивалентны оценкам Комиссии Коулса. Для них можно непосредственно проверить гипотезу, согласно которой рассматриваемое структурное уравнение не содержит экзогенных переменных s_{jt} . Такая проверка базируется на исследовании величины, которая асимптотически эквивалентна $T\mu$ и определяется непосредственно на основе оценок по двухшаговому методу наименьших квадратов.

В § 2, где в уравнение не входили переменные r_{jt} , установлено, что μ равно $b^{***} A^* M_{zz} A^{*'} b^{**}$, если вектор b^{**} нормализован по правилу $b^{***} M_{ee} b^{**} = 1$. Если в уравнение включены экзогенные переменные r_{jt} , μ равно $b^{***} A_w^* M_{ww} A_w^{*'} b^{**}$ при том же правиле нормализации. В этом случае можно использовать следующее, уже не зависящее от правила нормализации, равенство:

$$T\bar{\mu} = \frac{T b^{***} A_w^* M_{ww} A_w^{*'} b^{**}}{b^{***} M_{ee} b^{**}}. \quad (51)$$

Величина $T\bar{\mu}$ асимптотически эквивалентна выражению:

$$\frac{T \hat{b} A_w^* M_{ww} A_w^{*'} \hat{b}}{\hat{b}' M_{ee} \hat{b}}. \quad (52)$$

Действительно¹, если привести \hat{b} и b^{**} к одному правилу нормализации, они будут стремиться к одинаковому пределу, так что знаменатели выражений (51) и (52) также будут стремиться к одному и тому же положительному пределу; числитель выражения (51) имеет предельное распределение, и разность числителей (51) и (52) стремится по вероятности к нулю (чтобы установить этот последний пункт, достаточно заметить, что при стремлении $\sqrt{T}(b^{**} - \hat{b})$ по вероятности к нулю, $\sqrt{T} A_w^* b^{**}$ и $\sqrt{T} A_w^* \hat{b}$ будут асимптотически эквивалентны, тогда как $\sqrt{T} A_w^* b^{**}$ будет иметь предельное распределение²).

На основе равенства (40) можно записать:

$$\hat{b}' A_w^* M_{ww} A_w^{*'} \hat{b} = \hat{b}' M_{xx} \hat{b} - \hat{c}' M_{rr} \hat{c} - \hat{b}' M_{ee} b.$$

Кроме того, если $\hat{\eta}_t = \hat{b}x_t + \hat{c}r_t$, то

$$\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\eta}_t^2 = \hat{b}' M_{xx} \hat{b} - \hat{c}' M_{rr} \hat{c},$$

так как система (44) предполагает $M_{rx} \hat{b} = -M_{rr} \hat{c}$.

¹ Рассмотрим четыре последовательности случайных переменных x_T , y_T , u_T , v_T ($T = 1, 2, \dots, \infty$), таких, что $x_T - y_T$ стремится по вероятности к нулю, u_T и v_T стремятся к одному и тому же положительному пределу a и x_T (а значит, и y_T) имеет предельное распределение. С помощью предложений 4 и 9 из приложения к гл. 9 легко доказать, что $x_T/u_T - y_T/v_T$ стремится по вероятности к нулю.

² Пусть Q_T — матрицы, стремящиеся к невырожденной матрице, а x_T , y_T — случайные векторы, имеющие предельное распределение, и такие, что $x_T - y_T$ стремится по вероятности к нулю. Тогда выражение $x_T' Q_T x_T - y_T' Q_T y_T$, которое можно также записать в виде: $(x_T - y_T)' Q_T x_T - y_T' Q_T (x_T - y_T)$ стремится по вероятности к нулю.

Таким образом, выражению (52) и критерию переопределения можно придать удобный для применения вид:

$$T \left[\frac{\hat{\sigma}_{\eta}^2}{\hat{b}' M_{\varepsilon\varepsilon} \hat{b}} - 1 \right] \geq \chi_{m_2 - n + 1}^2(\alpha), \quad (53)$$

где α — принятый для критерия уровень значимости.

5) *Линейные однородные ограничения на коэффициенты одного уравнения*

До сих пор рассматривались методы оценки с ограниченной информацией только применительно к случаю исключающих ограничений. Как увидим, их легко можно обобщить на случай линейных однородных ограничений на коэффициенты одного уравнения (эти ограничения рассматривались в гл. 18, § 5). Такое обобщение имеет очевидный практический интерес, поскольку оно позволяет оценивать структурные уравнения, встречающиеся в прикладной эконометрии (см., например, второе уравнение системы (24) из гл. 18).

Итак, предположим, что необходимо получить оценку структурного уравнения

$$b'x_t + c'z_t = \eta_t, \quad (54)$$

на которое наложены ограничения

$$b'\Phi_b + c'\Phi_c = 0, \quad (55)$$

где Φ_b и Φ_c — известные матрицы из m_2 столбцов, и такие, что $[\Phi_b' \Phi_c']$ имеет ранг m_2 . Уравнение (55) является здесь формой условия, которое в гл. 18 выражено уравнением (22).

Можно доказать, что, если пренебречь ограничениями для других структурных уравнений, оценки квазimaxимума правдоподобия (b^{**} и c^{**}) удовлетворяют правилу нормализации ($b^{**'} M_{\varepsilon\varepsilon} b^{**} = 1$) и системе:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} - (1 + \bar{\mu}) M_{\varepsilon\varepsilon} & M_{xz} & \Phi_b \\ M_{zx} & M_{zz} & \Phi_c \\ \Phi_b' & \Phi_c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{**} \\ c^{**} \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad (56)$$

которая заменяет систему (41), и где v — вектор множителей Лагранжа, оцениваемых совместно с b^{**} и c^{**} , тогда как $\bar{\mu}$ является таким наименьшим числом, что большая матрица будет вырожденной.

Можно убедиться, что $T\bar{\mu} \geq \chi_{m_2 - n + 1}^2(\alpha)$ по-прежнему асимптотически определяет критическую область с уровнем значимости α для гипотезы, согласно которой удовлетворяются ограничения (55).

Можно, наконец, установить асимптотическую эквивалентность (b^{**} , c^{**}) оценке по двухшаговому методу наименьших квадратов (\hat{b} , \hat{c}). Если, например, априорные ограничения не касаются первой эндогенной переменной (Φ_b содержит в первой строке только нули), запишем структурное уравнение:

$$p_t = d'q_t + c'z_t - \eta_t \quad (57)$$

и ограничения

$$d'\Phi_d + c'\Phi_c = 0. \quad (58)$$

В этом случае определим оценки двухшагового метода наименьших квадратов (\hat{d} и \hat{c}), минимизируя

$$\sum_{i=1}^T (p_i - d' q_i^* - c' z_i)^2$$

при ограничениях (58). Здесь q_i^* обозначает расчетные значения эндогенных переменных, кроме первой, полученных на основе обычных множественных регрессий по отношению к z_i . Формулу (53) и в этом случае можно использовать как критерий переопределения.

5. Инструментальные переменные

В гл. 10 мы ввели в рассмотрение инструментальные переменные для оценки моделей с ошибками в переменных. В гл. 17, § 3 было показано, что состоятельные оценки коэффициентов отдельного структурного уравнения можно получить, рассматривая экзогенные переменные как инструментальные. Остается дать краткое обобщение полученных результатов на отдельном примере. В этом параграфе мы будем использовать работу Дж. Саргана [268].

Рассмотрим случай, когда уравнение не содержит экзогенных переменных и его можно записать:

$$p_i = d' q_i - \eta_i.$$

Как обычно в моделях с ошибками в уравнениях, будем предполагать, что случайные ошибки не коррелируют с экзогенными переменными. Отсюда следует, что

$$E(\eta_i z_i') = 0$$

или

$$[E(p_i z_i') = d' E(q_i z_i'). \quad (59)$$

Метод инструментальных переменных предполагает замену в уравнениях (59) математических ожиданий наблюдаемыми моментами и оценке d через d^* из системы:

$$m_{pz} = d^{*'} M_{qz}. \quad (60)$$

Она содержит $n - 1$ переменную d_i^* (компоненты d^*) и m уравнений. Рассмотрим три случая.

1) При $m < n - 1$ система (60) является неопределенной, d_i^* могут принимать различные значения. Это не должно удивлять, так как в данном случае уравнение неидентифицируемо.

2) Если $m = n - 1$, система (60) имеет единственное решение, которое при гипотезах 1—3 сходится к истинному значению d^0 . В этом случае модель является простой по крайней мере, если не учитывать ограничения для других уравнений. Оценку d можно получить также путем

косвенного выравнивания по методу наименьших квадратов. Легко заметить, что таким образом получается тот же результат, что и при решении системы (60).

Действительно, оценки матриц a_p и A_q системы приведенных уравнений будут определяться из

$$a_p^* = m_{pz} M_{zz}^{-1}; A_q^* = M_{qz} M_{zz}^{-1},$$

откуда получаем уравнения приведенной системы:

$$p_t = m_{pz} M_{zz}^{-1} z_t,$$

$$q_t = M_{qz} M_{zz}^{-1} z_t,$$

которые после исключения z_t дают:

$$p_t = m_{pz} M_{qz}^{-1} q_t = d^* q_t.$$

В этом случае двухшаговый метод наименьших квадратов и метод Комиссии Коулса также приводят к одному и тому же результату. Действительно, в силу (45) формулы (47) можно записать:

$$\hat{d} = (M_{qz} M_{zz}^{-1} M_{zq})^{-1} M_{qz} M_{zz}^{-1} m_{zp} = M_{zq}^{-1} m_{zp} = d^*.$$

С другой стороны, наибольший ранг матрицы $A^* M_{zz} A^{*'}$ равен $n - 1$, так что наименьший корень определителя (33) порядка n необходимо равен нулю. Метод Комиссии Коулса, таким образом, совпадает с двухшаговым методом наименьших квадратов.

3) При $m > n - 1$ система (60) в общем случае не будет иметь решения. В этом случае нельзя использовать в качестве инструментальных m экзогенных переменных. Но метод все-таки можно применить, используя $n - 1$ экзогенную переменную. Обозначим вектор этих переменных через u_t . Оценкой d будет:

$$d^* = M_{uq}^{-1} m_{up}. \quad (61)$$

Поскольку наблюдаемые моменты стремятся по вероятности к их математическим ожиданиям, d^* стремится по вероятности к d при любой совокупности экзогенных переменных, взятых в качестве инструментальных (лишь бы они не были коллинеарными, что исключается гипотезой 3). Но, очевидно, все эти совокупности не эквивалентны с точки зрения оценки d через d^* .

В связи с этим можно заметить, что

$$M_{uq} d = m_{up} - m_{un}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{T} (d^* - d) = M_{uq}^{-1} (\sqrt{T} m_{un}).$$

При неограниченном увеличении числа наблюдений матрица M_{uq} стремится к конечному пределу \bar{M}_{uq} (по крайней мере при выполнении гипотез 2 и 3). Таким образом, асимптотическая ковариационная матрица $\sqrt{T} (d^* - d)$ вычисляется с помощью ковариационной матрицы

$\sqrt{T}m_{u\eta}$, которая равна $\sigma_{\eta}^2 \bar{M}_{uu}$, где \bar{M}_{uu} — предел M_{uu} . Таким образом, оценкой ковариационной матрицы ($d^* - d$) будет:

$$\frac{\sigma_{\eta}^2}{T} M_{uq}^{-1} M_{uu} M_{qu}^{-1}. \quad (62)$$

Но матрица $M_{qu} M_{uu}^{-1} M_{qu}'$ равна разности между матрицей M_{qq} , относящейся к эндогенным переменным, и ковариационной матрицей отклонений от регрессии q_t по u_t . Таким образом, дисперсии оценок d_i^* будут тем меньше, чем теснее регрессия q_t на u_t . Следовательно, необходимо использовать те экзогенные переменные, которые играют наибольшую роль в определении эндогенных переменных.

Вместо выбора $n - 1$ инструментальной переменной из m экзогенных переменных можно найти $n - 1$ независимую *линейную комбинацию* эндогенных переменных для получения наивысшей возможной точности при оценке d . Это равноценно определению инструментальных переменных u_t из

$$u_t = Cz_t,$$

где C — матрица из $n - 1$ строк и m столбцов.

Для достижения наивысшей точности по крайней мере асимптотически можно использовать q_t^* , поскольку они представляют линейные комбинации экзогенных переменных, которые наиболее тесно коррелируют¹ с эндогенными переменными q_t . Такой выбор соответствует следующему значению матрицы C :

$$C = M_{qz} M_{zz}^{-1}. \quad (63)$$

Заметим, однако, что гипотеза независимости инструментальных переменных q_t^* и отклонений η_t удовлетворяется лишь асимптотически. В малых выборках μ_{qz} , очевидно, зависит как от ζ_t , так и от η_t .

¹ Этот вывод можно обосновать точнее. Действительно, обратная матрица к матрице из выражения (62) равна:

$$M_{qu} M_{uu}^{-1} M_{uq} = M_{qz} C' (CM_{zz} C')^{-1} CM_{zq}.$$

Но каким бы ни был вектор h квадратичная форма

$$h' M_{qz} C' (CM_{zz} C')^{-1} CM_{zq} h$$

достигает максимума, если C определяется из отношения (55). Для доказательства этого достаточно установить, что

$$h' M_{qz} C' (CM_{zz} C')^{-1} CM_{zq} h - h' M_{qz} M_{zz}^{-1} M_{zq} h \leq 0,$$

каковы бы ни были h и матрица C , имеющая ранг $n - 1$. Пусть N — симметрическая квадратная матрица, определяемая из $NN' = M_{zz}$. Положим, $g = N^{-1} M_{zq} h$ и $D = CN$. Для доказательства предыдущего неравенства достаточно доказать, что

$$g' [D' (DD')^{-1} D - I] g \leq 0,$$

при любых g и матрице D ранга $n - 1$. Но максимум отношения $g' D' (DD')^{-1} D g$ к $g' g$ равен наибольшему характеристическому корню $D' (DD')^{-1} D$. Эта последняя матрица есть квадратная проекционная матрица порядка m и ранга $n - 1$. Из ее характеристических корней $n - 1$ равен 1, остальные равны нулю. Таким образом, $g' D' (DD')^{-1} D g$ никогда не превышает $g' g$.

В силу (61) и (63) асимптотически эффективная оценка имеет вид:

$$\hat{d} = (M_{qz} M_{zz}^{-1} M_{zq})^{-1} M_{qz} M_{zz}^{-1} m_{zp}.$$

Она совпадает с оценкой по двухшаговому методу наименьших квадратов, определяемую формулой (46). Этот результат можно легко обобщить для того случая, когда рассматриваемое уравнение содержит экзогенные переменные. Это не удивительно, если учесть все, что мы уже знаем относительно асимптотической эффективности изучаемого метода.

Наше исследование показывает, что практически можно произвести выравнивание, используя иногда лишь некоторые из экзогенных переменных. Действительно, m экзогенных переменных часто бывают в высокой степени коллинеарными между собой. Если мы не будем использовать некоторые, не входящие в уравнение экзогенные переменные, то это мало повлияет на оценку по двухшаговому методу наименьших квадратов \hat{d} и значительно облегчит расчеты.

На практике использование только части экзогенных переменных иногда бывает необходимым, если число наблюдений невелико, а число экзогенных переменных значительно. Действительно, в формуле (63) (на первом этапе применения двухшагового метода наименьших квадратов) используется матрица M_{zz} . Если M_{zz} вырождена, что произойдет при $T < m$, эти методы невозможно использовать. Если T лишь незначительно превышает m , матрица M_{zz} является почти вырожденной, так как используемые статистические данные обычно сильно коррелируют.

6. Главные компоненты экзогенных переменных¹

В некоторых рассмотренных здесь методах при оценке отдельного уравнения используются экзогенные переменные, не входящие в это уравнение. Легко убедиться, что оценки не изменятся, если заменить некоторое число l переменных этого типа l новыми переменными, представляющими собой линейные комбинации первых переменных, при единственном условии независимости этих комбинаций.

Мы отметили также возможные преимущества использования линейных комбинаций экзогенных переменных в качестве инструментальных переменных.

Для упрощения методов оценки при максимальном сохранении их точности Т. Клок и Л. Меннес [175] предложили заменять экзогенные переменные их первыми главными компонентами. Этот подход, который будет изложен ниже, может представить определенный практический интерес.

¹ Определение главных компонент, их роли и методов их оценки по данным выборки можно найти в упоминавшихся работах Г. Тинтнера, Т. Андерсона, С. Кульбака и Д. Лоули — А. Максвелла, изданных на русском языке. — *Прим. ред.*

В § 12 определяются главные компоненты совокупности переменных. Для m экзогенных переменных z_{jt} главные компоненты являются линейными комбинациями вида:

$$v_{1t} = f'_1(z_t - \bar{z}), v_{2t} = f'_2(z_t - \bar{z}), \dots, v_{ht} = f'_h(z_t - \bar{z}),$$

где векторы из S коэффициентов попарно ортогональны, имеют единичную длину и находятся последовательно, причем f'_1 определяется так, что $\sum_{t=1}^T v_{1t}^2$ достигает максимума, а f'_h — так, что $\sum_{t=1}^T v_{ht}^2$ достигает максимума при заданных $f'_1, f'_2, \dots, f'_{h-1}$. Если матрица M_{zz} имеет ранг h , получим h главных компонент.

В целом k первых главных компонент будут k линейными комбинациями, которые, если взять их в совокупности, имеют для наблюдаемой выборки наибольшую возможную изменчивость. Замена m экзогенных переменных k главными компонентами может значительно упростить расчеты при k существенно меньшем m и не повлиять заметно на точность результатов, если остальные главные компоненты имеют слабую изменчивость.

Предположим в качестве примера, что оценки коэффициентов получены по двухшаговому методу наименьших квадратов, но на первом этапе расчетов регрессии q_{it} были определены не по экзогенным переменным z_{jt} , а по их первым k главным компонентам f_1, f_2, \dots, f_k . Обозначим через \hat{q}_{it} выравненные значения и через q_{it}^* , как и ранее, значения, выравненные по совокупности экзогенных переменных. На втором этапе вычислений в этом случае будут рассчитываться регрессии p_i по \hat{q}_{it} , а не по q_{it}^* .

Формулы расчета векторов \hat{q}_i и q_i^* показывают, что отклонения $\hat{q}_i - q_i^*$, очевидно, невелики в среднем и имеют несущественные дисперсии, если неиспользованные главные компоненты обладают слабой изменчивостью. Другими словами, мы ничего не выиграем в точности при выравнивании q_{it} , используя эти последние главные компоненты, а также не выиграем в точности оценки вектора коэффициентов d .

Аналогичные соображения относятся и к замене экзогенных переменных их первыми главными компонентами на первой фазе метода Комиссии Коулса.

В действительности метод Клоэка и Меннеса имеет преимущества только для больших моделей, содержащих большое число экзогенных переменных. В этом случае до начала оценки модели всегда имеет смысл определить главные компоненты совокупности наблюдаемых значений этих переменных. Так познается степень их коллинеарности. Если, например, значимые дисперсии имеют только четыре главных компоненты, M_{zz} будет мало отличаться от матрицы с рангом четыре. Претендовать на оценку отношений, включающих более пяти переменных, можно лишь в том случае, если выборка содержит большое число наблюдений.

7. Распределения в малых выборках

Обоснованием различных методов оценки в этой и предыдущей главах являлись их асимптотические свойства. Для более точной характеристики этих методов и получаемых с их помощью оценок следует лучше знать их свойства в выборках конечных размеров.

Это полезно с двух точек зрения. С одной стороны, можно лучше определить связанные с каждым методом оценки статистические приемы. Действенность критериев и доверительных областей можно узнать лучше, чем в асимптотических приближениях. С другой стороны, если мы будем знать распределения в конечных выборках, наши представления о сравнительных преимуществах различных методов могут измениться. Некоторая процедура, которая представляется асимптотически неадекватной, может оказаться интересной при анализе малых выборок того размера, который обычно встречается в эконометрии. Так, иногда считают, что прямое выравнивание по структурным уравнениям на практике представляет лучший метод оценки. Несомненно, он приводит к смещениям. Но, если дисперсии невелики, ошибки, получаемые при использовании этого метода, могут быть меньшими, чем для других.

Следует к тому же тщательно отличать две категории распределений: одна из которых относится к коэффициентам структурной формы, другая — к коэффициентам приведенной формы.

Распределения первой категории важны в случае, когда целью эконометрического исследования является оценка одного или двух структурных параметров. Модель из системы уравнений необходима для правильной интерпретации рассматриваемых данных. Но при использовании найденных значений структурных параметров к ней уже, как правило, не обращаются.

Напротив, если модель задумана одновременно для эконометрического анализа данных и прогнозирования на последующий период, особый интерес будет вызывать распределение оценок коэффициентов приведенной формы. Для прогнозирования значений эндогенных переменных в условиях, когда предполагаются известными значения экзогенных переменных, используется приведенная форма. Распределение прогнозируемых значений непосредственно связано с распределением оценок этой формы.

При изучении распределений, свойственных малым выборкам, возможны два подхода. Можно изучать строгую аналитическую форму законов распределения оценок, если известны распределения отклонений ε_{it} или η_{it} . Можно также применять так называемый метод «Монте-Карло», т. е. определять распределения оценок эмпирически, с помощью достаточного числа искусственных выборок¹.

Первый метод более мощен. Он приводит к точным представлениям о законах распределения и дает непосредственное представление о том, как изменяются распределения, когда варьируют параметры модели.

¹ По этой проблеме подробное изложение результатов, полученных с помощью метода Монте-Карло, можно найти в [160, гл. 10].

К сожалению, его применение весьма затруднительно в большинстве случаев, так как выборочные оценки имеют сложную структуру, плохо поддающуюся теоретическому анализу. Поэтому часто приходится довольствоваться результатами, полученными на основании искусственных выборок, хотя общность этих результатов всегда сомнительна.

Обобщая, можно сказать, что свойства переопределенных моделей из систем уравнений для малых выборок пока известны довольно плохо.

До последнего времени единственным, кто изучал оценки приведенной формы и условные прогнозы значений эндогенных переменных был Р. Саммерс [287]. Он применил метод Монте-Карло к переопределенной модели из двух уравнений и шести переменных. Используемые им выборки содержали в основном по двадцати наблюдений. Для сравнения результатов, полученных с помощью различных методов, Саммерс использовал абсолютное среднее отклонение.

Им было выбрано пять методов оценки: регрессия каждой эндогенной переменной по экзогенным переменным (метод, при котором пренебрегают априорными ограничениями для приведенной формы), метод квазимаксимума правдоподобия (см. гл. 19, § 4), метод Комиссии Коулса, двухшаговый метод наименьших квадратов и, наконец, прямое выравнивание по структурным уравнениям с помощью метода наименьших квадратов. Три последних метода вначале дают оценки структурной формы, которая затем используется для нахождения оценок приведенной формы.

Результаты соответствовали тому, что можно было предположить заранее, как из способа определения этих оценок, так и из асимптотической теории. Выравнивание по структурной форме с помощью метода наименьших квадратов дало наихудшие результаты. Это естественно, поскольку соответствующие оценки не сходятся к истинным значениям коэффициентов. Из остальных четырех методов в целом наилучшим оказался метод квазимаксимального правдоподобия, наихудшим — регрессия по экзогенным переменным. Этого следовало ожидать, так как первый метод является единственным, позволяющим прямо использовать всю совокупность априорных ограничений, тогда как в последнем этими ограничениями полностью пренебрегают.

Исследование Р. Саммерса позволяет также убедиться в том, что если одно из накладываемых априорных ограничений неточно, то методы, учитывающие это ограничение, дают худшие результаты, чем методы, которые его игнорируют.

В работе [23] аналитически определено распределение оценок двухшагового метода наименьших квадратов, примененного к структурным параметрам двух переопределенных моделей. Обе модели содержат по два уравнения, шесть переменных и ошибки с нормальным распределением. В исследовании показано, что эти оценки не имеют конечных моментов любого порядка¹.

Это не должно удивлять. В гл. 17, § 1 на примере очень простой модели определялась оценка α^* , соответствующая выравниванию по

¹ По этому же вопросу см. [24], [25], [163].

косвенному методу наименьших квадратов, которое в данном случае эквивалентно выравниванию по двухшаговому методу. При нормальном распределении ошибок эта оценка распределена как обратная величина к переменной с нормальным распределением. Таким образом, она не имеет ни одного конечного момента (тем не менее предельное распределение $\sqrt{T}(\alpha^* - \alpha^0)$ нормально: оно, таким образом, имеет конечные моменты любого порядка).

Результаты [23] имеют слишком частный характер, чтобы служить обоснованием статистических приемов или позволить сравнение различных методов оценки структурных параметров. Даже для рассматривавшихся моделей использовался только двухшаговый метод наименьших квадратов.

Но, напомнив, что оценки могут не иметь дисперсий, Р. Басман [23] своевременно высказал сомнение относительно обычного способа изложения результатов экспериментов по методу Монте-Карло для оценки структурных параметров. Авторы таких экспериментов обычно рассчитывали и приводили в своих работах среднее квадратическое отклонение оценок. Если оценка не имеет дисперсии, среднее квадратическое отклонение как характеристика не представляет интереса, так как при увеличении числа рассматриваемых искусственных выборок она неограниченно возрастает. Таким образом, предпочтительнее изучать непосредственно эмпирическое распределение оценок.

Но среднее квадратическое отклонение может служить основой для корректной относительной классификации различных методов, если они применяются к одним и тем же выборкам. Поэтому когда в работе приводится только эта характеристика, в своих рассуждениях мы будем основываться на ней¹.

Для структурных параметров уже упомянутое исследование Р. Саммерса [287] дало результаты, аналогичные тем, которые были получены для условного прогнозирования эндогенных переменных. В общем случае оценки квазимаксимума правдоподобия имели наименьшее среднее квадратическое отклонение, оценки прямого выравнивания по структурным уравнениям с помощью метода наименьших квадратов — наибольшее.

У. Нейсвангер и Т. Янси [229] сравнили результаты непосредственного выравнивания по методу наименьших квадратов и по методу Комиссии Коулса для оценки структурных параметров модели:

$$x_{1t} = \beta_{12} x_{2t} + \gamma_{11} z_{1t} + \gamma_{12} z_{2t} + \lambda_1 + \eta_{1t};$$

$$x_{1t} = \beta_{22} x_{2t} + \gamma_{23} z_{3t} + \gamma_{24} z_{4t} + \lambda_2 + \eta_{2t},$$

где η_1 и η_2 — ошибки с нормальным распределением, соответствующие обычным гипотезам (см. выше гипотезу 2).

Для этого они использовали 120 искусственных выборок по 25 наблюдений каждая. Их результаты приведены в помещаемой ниже табли-

¹ Здесь следует вспомнить исследование А. Бергстрема [29], результаты которого были обобщены изложены в ссылке на с. 212. Кроме того, различные характеристики, помимо среднего квадратического отклонения, используются для изложения результатов в исследовании Дж. Крэга [54]. Оно в целом подтверждает сделанные здесь общие выводы.

це. Оценки прямого выравнивания методом наименьших квадратов подвержены значительному смещению, и их среднее квадратическое отклонение несколько превышает среднее квадратическое отклонение оценок по методу Комиссии Коулса.

Расчеты Нейсвангера и Янси дают также интересные сведения относительно действенности статистических приемов при этих двух методах оценки. Для каждой выборки и каждого параметра был установлен доверительный интервал и два оцененных стандартных отклонения по обе стороны оцениваемого значения. Число случаев, в которых этот интервал не содержит истинного значения, помещено в таблице под заголовком «Число ошибочных интервалов». Поскольку считается, что интервал имеет уровень значимости приблизительно 95 %, статистические приемы будут приближенно действенными для рассматриваемых малых выборок, если число ошибочных интервалов окажется порядка 6. Именно так обстоит дело для оценок методом Комиссии Коулса и совершенно иначе — для оценок прямого выравнивания методом наименьших квадратов.

Результаты расчетов У. А. Нейсвангера и Т. А. Янси

Параметры	β_{12}	γ_{11}	γ_{12}
Истинное значение коэффициентов	—0,40	0,10	0,45
<i>Метод прямого выравнивания</i>			
средняя оценка	—0,26	0,13	0,39
среднее квадратическое отклонение	0,18	0,07	0,08
число ошибочных интервалов	46	12	24
<i>Метод Комиссии Коулса</i>			
средняя оценка	—0,43	0,10	0,46
среднее квадратическое отклонение	0,13	0,07	0,07
число ошибочных интервалов	7	6	6

Таким образом, прямое выравнивание по структурным уравнениям дает несколько менее точные оценки по сравнению с методом Комиссии Коулса. Но, кроме того, оно сопровождается в общем случае расчетом доверительных интервалов и критериев, значительно преувеличивающих полученную степень точности. Этот недостаток является более серьезным, чем первый.

Упомянувшиеся до сих пор результаты относились к моделям без запаздывающих эндогенных переменных. Г. Вагнер [306] и А. Л. Нагар [227] рассмотрели различные оценки, полученные на основе искусственных выборок для переопределенной модели из двух уравнений, в которую была включена одна запаздывающая эндогенная переменная. Их результаты труднее интерпретировать, чем вышеприведенные, так как влияние взаимозависимости уравнений переплетается с эффектом авторегрессионного характера переменных. Наблюдаемые для малых выборок смещения могут быть связаны с любой из этих причин. Тем не

менее расчеты Вагнера и Нагара подтверждают сделанные выше выводы. Прямое выравнивание по структурным уравнениям дает оценки, которые могут содержать значительные смещения. Хотя дисперсия этих оценок может быть невелика, среднее квадратическое отклонение часто существенно превышает среднее квадратическое отклонение оценок, полученных с помощью состоятельных методов, определенных в этой и предыдущей главах.

Следует, наконец, упомянуть довольно полное исследование Дж. Крэга [55] относительно влияния ошибок спецификации. Применяя метод Монте-Карло, Крэг получил следующие выводы. Незначительные ошибки спецификации не оказывают существенного влияния на получаемые результаты. Более существенные ошибки могут привести к необоснованному сужению модели. Например, ошибочно можно принять равными нулю коэффициенты, имеющие существенные величины. Такие ошибки влияют обычно на оценки, полученные методами с полной информацией, но не оказывают существенного воздействия при использовании методов с ограниченной информацией.

Поскольку в модели, специфицированной корректно, выигрыш в точности при использовании первых методов по сравнению со вторыми чаще всего невелик, имеет смысл не обращаться к методам с полной информацией, если спецификация некоторых уравнений модели сомнительна. Было бы ошибкой не отказаться вовремя от слишком неточной модели, в которой мы не сумели воплотить наши знания об изучаемом явлении, сохранив, например, в структурном уравнении переменную, о которой известно, что она почти не влияет на изучаемую динамику явлений¹. Такая ошибка может весьма существенно повлиять также на точность результатов, особенно если пропущенное ограничение позволяет идентифицировать коэффициенты, которые без него неидентифицируемы. «Успешно строить эконометрические модели — очень трудное дело, — говорит Крэг. — Приходится плыть между Сциллой ошибок спецификации и Харибдой неполной спецификации».

Скажем в заключение, что наши знания о распределениях в условиях малых выборок пока весьма отрывочны. Тем не менее то, что известно сегодня, никоим образом не противоречит положениям асимптотической теории. Эта теория продолжает быть наиболее серьезным источником наших представлений о методах оценки и их свойствах.

¹ Для систематического изучения этого вопроса см. [260].

ЭПИЛОГ

В этой работе детально рассматривались свойства различных статистических методов. Хотя еще остается много пробелов, теоретические результаты уже существенны. Выбрав модель, эконометрист в общем случае может определить, какой критерий или какой метод оценки подходит для интересующего его частного случая.

Но выбор модели обуславливает все эконометрическое исследование и всегда ставит сложную проблему. Модель концентрирует всю совокупность априорной информации, которая совместно со статистическими данными позволяет делать индуктивные выводы. Эта информация в общем случае неопределенна и плохо формализована. Часто она представляется весьма субъективной.

Искусство эконометриста проявляется в равной мере в выборе адекватной модели и эффективного статистического метода. Поэтому эконометрист не может быть только статистиком, он должен иметь солидное экономическое образование. Только тогда он сможет обработать массу накопленных знаний относительно изучаемого частного вопроса, которые должны найти свое отражение в модели.

Наконец, мы никогда не должны забывать, что прогресс в понимании экономических законов прямо зависит от качества и обилия статистических данных. Ничто не может заменить медленную работу по объективному наблюдению за фактами. Все методологические усовершенствования окажутся ненужными, если их придется применять к посредственным данным.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. A. P. J. Abrahamse and J. Koerts (1968), *The Power of Three Test Procedures For Serial Correlation in Least Squares Regression*, Netherlands School of Economics, Mimeographed.
2. A. C. Aitken (1935), «On Least Square and Linear Combination of Observations», *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 55, p. 42.
3. A. C. Aitken (1939), *Determinants and Matrices*, Edinburgh, 1939.
4. S. Almon (1965), «The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures», *Econometrica*, janvier 1965.
5. F. Alt (1942), «Distributed Lags», *Econometrica*.
6. T. Amemiya and W. A. Fuller (1967), «A Comparative Study of Alternative Estimators in a Distributed Lag Model», *Econometrica*, juillet-octobre 1967.
7. E. Ames and S. Reiter (1961), «Distributions of Correlation Coefficients in Economic Time Series», *Journal of the American Statistical Association*, sept. 1961.
8. R. L. Anderson (1942), «Distribution of the Serial Correlation Coefficient», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 13, 1942, p. 1 á 13.
9. T. W. Anderson (1948), «The Asymptotic Distributions of the Roots of Certain Determinantal Equations», *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 10, n° 1.
10. T. W. Anderson (1951), «Estimating Linear Restrictions on Regression Coefficients for Multivariate Normal Distributions», *Annals of Mathematical Statistics*, septembre 1951.
11. T. W. Anderson (1958), *Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley, New York, 1958.
12. T. W. Anderson (1959), «On Asymptotic Distributions of Estimates of Parameters of Stochastic Difference Equations», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 30.
13. T. W. Anderson and H. Rubin (1949), «Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 20, n° 1, mars 1949.
14. T. W. Anderson and H. Rubin (1950), «The Asymptotic Properties of Estimates of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 21, n° 4, décembre 1950.
15. T. W. Anderson and H. Rubin (1956), «Statistical Inference in Factor Analysis», *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* vol. V, Berkeley, 1956.
16. F. J. Anscombe (1960), «Examination of Residuals», *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. I, Berkeley.
17. K. Arrow (1960), «Decision Theory and the Choice of a Level of Significance for the *t*-Test», in I. Olkin et al. (1960).

18. K. J. Arrow and M. Hoffenberg (1959). *A Time Series Analysis of Interindustry Demands* (cf. chap. 4, §4), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.
19. M. Atiqullah (1962), «The Estimation of Residual Variance in Quadratically Balanced Least-Squares Problems and the Robustness of the F-test», *Biometrika*, June 1962.
20. M. Atiqullah (1964), «The Robustness of the Covariance Analysis of a One-Way Classification», *Biometrika*, décembre, 1964.
21. M. S. Bartlett (1955), *Stochastic Processes*, Cambridge University Press. Бартлетт М. Введение в теорию случайных процессов. М., ИЛ, 1958.
22. R. L. Basmann (1957), «A Generalized Classical Method of Linear Estimation of Coefficients in a Structural Equation», *Econometrica*, 1957.
23. R. L. Basmann (1961), «A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-Identified Cases», *Journal of the American Statistical Association*, septembre 1961.
24. R. L. Basmann (1963 a), «A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimations in a Leading Three-Equation Case», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 58, p. 161—171.
25. R. L. Basmann (1963 b), «Remarks Concerning the Application of Exact Finite Sample Distribution Functions of G. C. L. Estimators in Econometric Statistical Inference», *Journal of the American Stat. Association*, décembre 1963.
26. J. Bass (1956), *Cours de Mathématiques*, Masson et C^{ie}, 1956.
27. E. G. Bennion (1952), «The Cowles Commission's «Simultaneous Equation Approach» A Simplified Explanation», *Review of Economics and Statistics*, février 1952.
28. R. Bentzel and B. Hansen (1954), «On Recursiveness and Interdependency in Economic Models», *Review of Economic Studies*, 22, p. 153—168.
29. A. R. Bergstrom (1962), «The Exact Sampling Distributions of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume», *Econometrica*.
30. J. Berkson (1950), «Are there two regressions?», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 45.
31. A. Blanc-Lapierre et R. Fortet (1953), *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.
32. M. Boiteux (1956), «L'amortissement — Dépréciation des automobiles», *Revue de Statistique appliquée*, vol. 4, n° 4, décembre 1956.
33. G. E. P. Box (1953), «Non Normality and Tests on Variances», *Biometrika* vol. 40, 1953.
34. G. E. P. Box (1954), «Some theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance I», *Annals of Mathematical Statistics*.
35. G. E. P. Box and G. S. Watson (1962), «Robustness to Non-Normality of Regression Tests», *Biometrika*, June 1962.
36. M. Brichler (1946), «Le transport des voyageurs par chemin de fer», I. N. S.E.E., Études théoriques, n° 2.
37. T. M. Brown (1952), «Habit Persistence and Lags in Consumer Behaviour» *Econometrica*, vol. 20, juil., 1952.
38. T. M. Brown (1954), «Standard Error of Forecast of a Complete Econometric Model», *Econometrica*, avril 1954.
39. T. M. Brown (1959), «Simplified Full Maximum Likelihood and Comparative Structural Estimates», *Econometrica*, octobre 1959.
40. T. M. Brown (1960), «Simultaneous Least Squares: A Distribution Free Method of Equation System Structure Estimation», *International Economic Review*, sept. 1960.
41. G. Calot (1965), *Cours de Statistique descriptive*, Dunod, Paris.
42. G. Calot (1967 a), *Cours de Calcul des Probabilités*, 2^e édition, Dunod, Paris.
43. G. Calot (1967 b), «Significatif ou non significatif? Réflexions à propos de la théorie et de la pratique des tests statistiques», *Revue de Statistique Appliquée*, 1967, n° 1.

44. D. G. Champnowne (1960), «An experimental investigation of the robustness of certain procedures for estimating means and regression coefficients», *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, vol. 123, part 4.
45. T. C. Chang (1945—46), «International Comparison of Demand for Import», *The Review of Economic Studies*, vol. 34.
46. T. C. Chang (1948), «A Statistical Note on World Demand for Export», *Review of Economics and Statistics*, mai 1948.
47. H. Chernoff and N. Divinsky (1953), «The Computation of Maximum-Likelihood Estimates of Linear Structural Equations», dans W. C. Hood et T. Koopmans (1953).
48. G. Chow (1968), «Two Methods of Computing Full-Information Maximum Likelihood Estimates in Simultaneous Stochastic Equations», *International Economic Review*, fév. 1968.
49. C. Christ (1966), *Econometric Models and Methods*, John Wiley, New York.
50. D. Cochran and G. H. Orcutt (1949 a), «Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Auto-Correlated Error Terms», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, p. 32—61.
51. D. Cochran and G. H. Orcutt (1949 b), «A Sampling Study of the Merits of Autoregressive and Reduced Form Transformations in Regression Analysis», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, p. 356—372.
52. A. G. Constantine (1966), «The Distribution of Hotelling's Generalized T^2 », *Annals of Mathematical Statistics*, Feb. 1966.
53. J. B. Copas (1966), «Monte Carlo Results for Estimation in a Stable Markov Time Series», *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, vol. 129, Part 1.
54. J. G. Cragg (1966), «On the Sensitivity of Simultaneous-Equations Estimators to the Stochastic Assumptions of the Models», *Journal of the American Statistical Association*, mars 1966.
55. J. G. Cragg (1968), «Some Effects of Incorrect Specification on the Small Sample Properties of Several Simultaneous Equation Estimators», *International Economic Review*, février 1968.
56. H. Cramer (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press.
К р а м е р Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
57. H. E. Daniels (1956), «The Approximate Distribution of Serial Correlation Coefficients», *Biometrika*, vol. 43.
58. G. Darmon (1936), *Méthodes d'estimation*, Hermann, Paris, 1936.
59. G. Darmon (1937), «Résumés exhaustifs d'un ensemble d'observations», *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, p. 288—293.
60. G. Darmon (1945), «Sur les limites de dispersion de certaines lois», *Revue de l'Institut International de Statistique*, 13^e année, p. 9—15.
61. G. Darmon (1952), «Sur l'estimation des grandeurs par leurs mesures», *Annuaire du Bureau des Longitudes*.
62. F. N. David (1947), «A Power Function for Tests of Randomness in a Sequence of Alternatives», *Biometrika*, 1947, p. 335—339.
63. F. N. David and J. Neyman (1938), «Extension of the Markoff Theorem on Least Squares», *Statistical Research Memoirs*, vol. II, décembre 1938. Londres.
64. H. Davis (1941), *The Analysis of Economic Time Series*, The Principia Press, Bloomington.
65. A. Dhondt (1960), «Sur une généralisation d'un théorème de R. Frisch en analyse de confluence», *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, vol. 2, n° 1, Bruxelles.
66. J. Dieudonné (1960), *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
67. J. L. Doob (1953), *Stochastic Processes*, John Wiley, New York.
Д у б Д. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.
68. J. Dreze (1968), «Limited Information Estimation From a Bayesian Viewpoint», Mimeographed, CORE, Louvain.
69. J. S. Duesenberry (1952), «Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior», Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

70. D. D u g u é (1958), *Traité de Statistique théorique et appliquée*, Masson et Cie.
71. D. D u g u é et M. G i r a u l t (1969), *Analyse de la variance et plans d'expérience*, Probabilités, Statistique, Recherche opérationnelle, Dunod, Paris.
72. D. B. D u n c a n et R. H. J o n e s (1966), «Multiple Regression With Stationary Errors», *Journal of the American Statistical Association*, déc. 1966.
73. O. J. D u n n (1959), «Confidence Intervals for the Means of Dependent Normally Distributed Variables», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 54, septembre 1959.
74. D. D u r a n d (1954), «Joint Confidence Regions for Multiple Regression Coefficients», *Journal of the American Statistical Association*, mars 1954, vol. 49.
75. J. D u r b i n (1953), «A Note on Regression when there is Extraneous Information about one of the Coefficients», *Journal of the American Statistical Association*.
76. J. D u r b i n (1957), «Testing for Serial Correlation in Systems of Simultaneous Regression Equations», *Biometrika*, décembre 1957.
77. J. D u r b i n (1960 a), «Estimation of Parameters in Time-Series Regression Models», *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 22, n° 1, 1960, p. 139—153.
78. J. D u r b i n (1960 b), «The Fitting of Time-Series Models», *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 28, n° 3, 1960, p. 233—244.
79. J. D u r b i n (1961), «Trend Elimination by Moving-Average and Variate-Difference Filters», *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 33^e sessions, Paris, 1963.
80. J. D u r b i n (1963 a), «Trend Elimination for the Purpose of Estimating Seasonal and Periodic Components of Time Series», in M. Rosenblatt (1963).
81. J. D u r b i n (1963 b), «Maximum-Likelihood Estimation of the Parameters of a System of Simultaneous Regression Equations», Communication au Congrès de Copenhague.
82. J. D u r b i n (1967), «Testing for Serial Correlation in Least-Squares Regression when some of the Regressors are Lagged Dependent Variables», Mimeographed.
83. J. D u r b i n (1968), «An Exact Test for Serial Correlation in Least-Squares Regression when the Bounds Test is Inconclusive», Mimeographed.
84. J. D u r b i n (1969), «Tests for Serial Correlation in Regression Analysis Based on the Periodogram of Least-Squares Residuals», *Biometrika*, Mars 1969.
85. J. D u r b i n et G. S. W a t s o n (1950 et 1951), «Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression», *Biometrika*, décembre 1950 et juin 1951.
86. R. M. D u v a l l (1966), «Time Series Analysis by Modified Least-Squares Techniques», *Journal of the American Statistical Association*, May 1966.
87. P. S. D w y e r (1951), *Linear Computations*, John Wiley & Sons, New York, 1951.
88. F. E i c k e r (1963), «Asymptotic Normality and Consistency of the Least-Squares Estimators, for Families of Linear Regressions», *Annals of Mathematical Statistics*, juin 1963.
89. H. E i s e n p r e s s (1962), «Note on the Computation of Full-Information Maximum-Likelihood Estimates of Coefficients of a Simultaneous System», *Econometrica*, avril 1962.
90. H. E i s e n p r e s s et J. G r e e n s t a d t (1966), «The Estimation of Nonlinear Econometric Systems», *Econometrica*, octobre 1966.
91. R. F é r o n (1956), «Information, Régression, Corrélation», *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, vol. 5, fascicule 3—4.
92. F. M. F i s h e r (1959), «Generalization of the Rank and Order Conditions for Identifiability», *Econometrica*, juillet 1959.
93. F. M. F i s h e r (1961 a), «On the Cost of Approximate Specification in Simultaneous Equation Estimation», *Econometrica*, avril 1961.
94. F. M. F i s h e r (1961 b), «Identifiability Criteria in Nonlinear Systems», *Econometrica*, octobre 1961.
95. F. M. F i s h e r (1963), «Uncorrelated Disturbances and Identifiability Criteria», *International Economic Review*, May 1963.
96. F. M. F i s h e r (1965), «Identifiability Criteria in Nonlinear Systems: A Further Note», *Econometrica*, janvier 1965.

97. I. Fisher (1925), «Our Unstable Dollar and the so-called Business Cycle», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 20.
98. I. Fisher (1937), «Note on a Short-cut Method for Calculating Distributed Lags», *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, vol. 29.
99. R. A. Fisher (1929), «Test of Significance in Harmonic Analysis», *Proceedings of the Royal Society, A*, 1929.
100. W. Fisher (1962), «Estimation in the Linear Decision Model», *International Economic Review*, janvier 1962.
101. P. R. Fisk (1967), *Stochastically Dependent Equations*, C. Griffin and Co, London.
102. C. Fourgeaud (1951), «Recherche de relations à forme linéaire dans un système économique», *Cahiers du séminaire d'économétrie*, n° 1.
103. C. Fourgeaud (1955), «L'estimation dans les modèles à composante saisonnière», *Thèse*, Faculté des Sciences, Paris, 1955.
104. K. A. Fox (1954), «Structural Analysis and the Measurement of Demand for Farm Products», *Review of Economics and Statistics*, février 1954.
105. K. A. Fox (1958), *Econometric Analysis for Public Policy*, Iowa State College Press, Ames, Iowa, 1958.
106. M. Fréchet (1943), «Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons», *Revue de l'Institut International de Statistique*.
107. M. Friedman (1957), *A Theory of the Consumption Function*, National Bureau of Economic Research, New York, 1957.
108. R. Frisch (1928), «Correlation and Scatter in Statistical Variables», *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Band, 8, 1928.
109. R. Frisch (1934), *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*, University Institute of Economics, Oslo.
110. R. Frisch et F. V. Waugh (1933), «Partial Time Regression as Compared with Individuals Trends», *Econometrica*, vol. 1, p. 221—222.
111. J. Garnier (1946), *La consommation de tabac en France de 1921 à 1938*, I.N.S.E.E., Études théoriques n. 2.
112. K. F. Gauss (1821—1823), *Theoria Combinationis Observationem erroribus minimis obnoxiale*, Traduction française par J. Bertrand, Paris, 1855.
113. A. K. Gayen (1950), «The Distribution of the Variance Ratio in Random Samples of any Size Drawn from Non-Normal Universes», *Biometrika*.
114. R. C. Geary (1942), «Inherent relations between random variables», *Proc. Roy. Irish Acad.*, vol. 47 (1942), Sect. A, n° 6.
115. R. C. Geary (1947), «Testing for Normality», *Biometrika*.
116. R. C. Geary (1949), «Determination of Linear Relations between Systematic Parts of Variables with Errors of Observation the Variances of which are Unknown», *Econometrica*, vol. 17, 1949.
117. S. Geisser (1965), «Bayesian Estimation in Multivariate Analysis», *The Annals of Mathematical Statistics*, Feb. 1965, vol. 36.
118. S. Geisser and J. Cornfield (1963), «Posterior Distributions for Multivariate Normal Parameters», *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 25.
119. N. Giri, J. Kiefer and C. Stein (1963), «Minimax Character of Hotelling's T^2 Test in the Simplest Case», *Annals of Mathematical Statistics*, décembre 1963, p. 1524—1535.
120. M. A. Girshick and T. Haavelmo (1947), «Statistical Analysis of the Demand for Food», *Econometrica*, avril 1947; reproduit partiellement dans W. C. Hood et T. C. Koopmans ed. (1953).
121. A. S. Goldberger (1961), «Stepwise Least Squares: Residual Analysis and Specification Errors», *Journal of the American Statistical Association*, 1961, p. 998—1000.
122. A. S. Goldberger (1964), *Econometric Theory*, John Wiley, New York.
123. S. Goldfeld, R. E. Quandt et H. F. Trotter (1966), «Maximization by Quadratic Hill-Climbing», *Econometrica*, juillet 1966.
124. R. W. Goldsmith (1955), *A Study of Saving in the United States*, volumes 1, 2, 3, Princeton University Press, 1955.

125. C. W. J. Granger (1966), «The Typical Spectral Shape of an Economic Variable», *Econometrica*, janvier 1966.
126. U. Grenander (1954), «On the Estimation of Regression Coefficients in the Case of an Autocorrelated Disturbance», *Annals of Mathematical Statistics*, juin 1954.
127. U. Grenander et M. Rosenblatt (1956), «Statistical Analysis of Stationary Time Series», Stockholm, 1956.
128. Z. Griliches (1961), «A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags», *Econometrica*, 1961.
129. Z. Griliches (1967), «Distributed Lags: A Survey», *Econometrica*, janvier 1967.
130. Y. Grunfeld (1961), «The Interpretation of Cross Section Estimates in a Dynamic Model», *Econometrica*, juill. 1961.
131. Y. Grunfeld (1963), *Measurement in Economics: Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld*, Stanford University Press, 1963.
132. G. Th. Guilbaud (1951), «L'étude statistique des oscillations économiques», *Cahiers du Séminaire d'Econometrie*, n° 1, Librairie de Médecis, Paris.
133. G. Th. Guilbaud (1968), *Statistique des Chroniques*, Dunod, Paris, 1968.
134. T. Haavelmo (1943), «The Structural Implication of a System of Simultaneous Equations», *Econometrica*, vol. 11, 1943.
135. T. Haavelmo (1944), «The Probability Approach in Econometrics», *Econometrica*, vol. 12, Supplément.
136. P. R. Halmos (1948), *Finite Dimensional Vector Spaces*, Princeton University Press, 1948. Une seconde édition complétée a été publiée en 1958, van Nostrand, Princeton.
137. E. J. Hannan (1960), *Time Series Analysis*, London, Methuen and Co, 1960.
С изд. 1962 г.: Хеннан Э. Дж. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1964.
138. E. J. Hannan (1963 a), «The Estimation of Seasonal Variation in Economic Time Series», *Journal of the American Statistical Association*, mars 1963.
139. E. J. Hannan (1963 b), «Regression for Time Series», in M. Rosenblatt (1963).
140. E. J. Hannan (1965), «The Estimation of Distributed Lags», *Econometrica*.
141. B. I. Hart (1942) «Tabulation of the Probabilities of the Ratio of the Mean Square Difference to the Variance» et «Significance Levels for the Ratio of the Mean Square Difference to the Variance», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 13, 1942, p. 207—214 et 445—447.
142. H. O. Hartley (1961), «The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares», *Technometrics*, May, 1961.
143. E. O. Heady and J. L. Dillon (1961), *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames.
Хе ди Э. и Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. М., «Прогресс», 1965.
144. R. C. Henshaw (1965), «Testing Single Equation Least-Squares Regression Models for Autocorrelated Disturbances», *Econometrica*, vol. 34.
145. T. P. Hill (1959), «An Analysis of the Distribution of Wages and Salaries in Great Britain», *Econometrica*, vol. 27, n° 3, juil. 1959.
146. I. Hoch (1962), «Estimation of Production Function Parameters Combining Time-Series and Cross-Section Data», *Econometrica*, janv. 1962.
147. L. Hodges Jr and E. L. Lehmann, «Some Problems in Minimax Point Estimation», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 21, n° 2, juin 1950.
148. W. Hoeffding (1968), «Some Recent Developments in Nonparametric Statistics», *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 36, n° 2.
149. R. V. Hogg (1961), «On the Resolution of Statistical Hypotheses», *Journal of the American Statistical Association*, déc. 1961.

150. F. C. Holte (1962), *Economic Shock-Models*, Norwegian Universities Press, Oslo.
151. W. C. Hood and T. C. Koopmans ed. (1953), *Studies in Econometric Method*, Cowles Commission Monograph, n° 14, John Wiley, New York.
152. J. W. Hooper and A. Zellner (1961), «The Error of Forecast for Multivariate Regression Models», *Econometrica*, octobre 1961.
153. H. Hotelling (1950), «A Generalized T Test and Measure of Multivariate Dispersion», in J. Neyman, ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley.
154. P. J. Huber (1964), «Robust Estimation of a Location Parameter», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, n° 1, March 1964.
155. L. Hurwicz (1950), «Least Squares Bias in Time Series» dans T. C. Koopmans ed., (1950).
156. K. Ito (1960), «On Multivariate Analysis of Variance Tests», *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 32^e session, vol. 4. (Tokyo).
157. K. Ito et W. J. Schull (1964), «On the Robustness of the T^2 Test in Multivariate Analysis of Variance when Variance-Covariances Matrices are not Equal», *Biometrika*, vol. 51, juin 1964.
158. W. James and C. Stein (1961), «Estimation with Quadratic Loss», *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley.
159. G. M. Jenkins (1956), «Tests of Hypotheses in the Linear Autoregressive Model II», *Biometrika*, vol. 43.
160. J. Johnston (1963), *Econometric Methods*, Mc. Graw-Hill, New York.
161. D. Jorgenson (1964), «Minimum Variance, Linear, Unbiased Seasonal Adjustment of Economic Time Series», *Journal of the American Statistical Association*, septembre 1964.
162. D. Jorgenson (1966), «Rational Distributed Lag Functions», *Econometrica*, janvier 1966.
163. D. G. Kabe (1963), «A Note on the Exact Distributions of the GCL Estimators in Two Leading Over-Identified Cases», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 58, p. 535—537.
164. M. G. Kendall (1948), *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2. Charles Griffin, Londres, 1948.
165. M. G. Kendall (1955), *Rank Correlation Methods*, Griffin, London, Seconde édition.
Кендэл М. Г. Ранговые корреляции. М., «Статистика», 1975.
166. M. G. Kendall (1961), «A Theorem in Trend Analysis», *Biometrika* vol. 48.
167. J. M. Keynes. *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London, MacMillan.
Кейнс Д. М. Общая теория занятости, процента и денег, М., ИЛ, 1949.
168. J. Kiefer and J. Wolfowitz (1956), «Consistency of the Maximum Likelihood Estimator in the Presence of Infinitely Many Incidental Parameters», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 27.
169. L. Klein (1951), «Estimation Patterns of Savings Behavior from Sample Survey Data», *Econometrica*, vol. 19, n° 4, octobre 1951.
170. L. Klein (1953), *A Textbook of Econometrics*, Row, Peterson and Company, Evanston, Illinois, 1953.
171. L. Klein (1955), «The Empirical Foundations of Keynesian Economics» dans: K. K. Kurihara ed., *Post-Keynesian Economics*, George Allen and Unwin Ltd, Londres, 1955.
172. L. Klein (1958), «The Estimation of Distributed Lags», *Econometrica*, octobre 1958.
173. L. Klein (1960), «The Efficiency of Estimation in Econometric Models», dans *Essays in Economics and Econometrics*, University of North Carolina, 1960.
174. L. Klein and A. S. Goldberger (1955), *An Econometric Model of the United-States, 1929—52*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1955.

175. T. K l o e k and L. B. M. M e n n e s (1960), «Simultaneous Equations Estimation Based on Principal Components of Predetermined Variables», *Econometrica*, Janvier 1960.
176. L. H. K o o p m a n s (1964), «On the Multivariate Analysis of Weakly Stationary Stochastic Processes», *Annals of Mathematical Statistics*, Dec. 1964.
177. T. C. K o o p m a n s (1937), *Linear Regression Analysis of Economic Time Series*, Haarlem.
178. T. C. K o o p m a n s (1949), «Identification Problems in Economic Model Construction», *Econometrica*, avril 1949.
179. T. C. K o o p m a n s ed (1950), «Statistical Inference in Dynamic Economic Models», *Cowles Commission Monograph*, n° 10, Wiley, New York.
180. T. C. K o o p m a n s and W. C. H o o d (1953), «The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships», dans W. C. Hood and T. C. Koopmans ed. (1953).
181. T. C. K o o p m a n s and O. R e i e r s o l (1950), «The Identification of Structural Characteristics» *The Annals of Mathematical Statistics*, juin 1950.
182. T. C. K o o p m a n s, H. R u b i n and R. B. L e i p n i k (1950), «Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics», dans T. C. K o o p m a n s ed. (1950).
183. L. M. K o y c k (1954), *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1954.
184. W. K r u s k a l (1961), «The Coordinate-Free Approach to Gauss-Markov Estimation and its Application to Missing and Extra Observations», in J. Neyman ed., *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, University of California Press.
185. G. W. L a d d (1964), «Regression Analysis of Seasonal Data», *Journal of the Royal Statistical Association*, Juin 1964.
186. P. S. L a p l a c e (1812), *Théorie analytique des probabilités*, Paris.
187. D. N. L a w l e y (1940), «The Estimation of Factor Loadings by the Method of Maximum Likelihood», *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 60.
188. D. N. L a w l e y (1953), «A Modified Method of Estimation in Factor Analysis and Some Large Sample Results», *Factor Analysis; Selected Publications from the Uppsala Institute of Statistics*, vol. 9.
189. L. L e C a m (1956), «On the Asymptotic Theory of Estimation and Testing Hypotheses», *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1956.
190. A. L. L e g e n d r e (1806), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris.
191. E. L. L e h m a n n (1959), *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chapman and Hall Limited, Londres.
Л е м а н Э. Л. Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964.
192. E. L. L e h m a n n (1964), «Asymptotically Nonparametric Inference in Some Linear Models With One Observation per Cell», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, n° 2, June 1964.
193. A. L e n t i n et J. R i v a u d (1958), *Éléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris.
194. Ph. L' H a r d y (1966), «Application des méthodes bayésiennes à l'estimation d'élasticités de consommation», *Revue de Statistique Appliquée*, 1966, vol. 14 n° 4.
195. D. V. L i n d l e y (1947), «Regression Lines and the Linear Functional Relationship», *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 9, Supplément, nos 1 et 2, p. 218.
196. N. L i v i a t a n (1961), «Errors in Variables and Engel Curve Analysis», *Econometrica*, juillet 1961.
197. N. L i v i a t a n (1963), «Tests of the Permanent Income Hypothesis Based on a Reinterview Savings Survey», in Grunfeld Y. (1963).
198. M. L o è v e (1955), *Probability Theory*, D. van Nostrand Company, Inc., New York.
Л о в М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.

199. M. C. Lovell (1963), «Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis», *Journal of the American Statistical Association*, déc. 1963.
200. E. Lyttkens (1964), «Standard Errors of Regression Coefficients by Auto-correlated Residuals», dans H. Wold (1964).
201. D. Macdougall (1951—1952), «British and American Exports: A Study suggested by the Theory of Comparative Costs», *Economic Journal*, décembre 1951 et septembre 1952.
202. A. Madansky (1959), «The Fitting of Straight Lines when Both Variables are Subject to Errors», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 54.
203. E. Malinvaud (1950), «Les élasticités par rapport aux prix dans les échanges internationaux», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, mai-juin 1950.
204. E. Malinvaud (1956), «Réflexions sur l'emploi des modèles à erreurs sur les variables», *Les modèles dynamiques en économétrie*, C.N.R.S., Paris.
205. E. Malinvaud (1957), «L'agrégation dans les modèles économiques», *Cahiers du Séminaire d'Econométrie*, n° 4, Paris.
206. E. Malinvaud (1961 a), «The Estimation of Distributed Lags: A Comment», *Econometrica*, juillet (1961).
207. E. Malinvaud (1961 b), «Estimation et prévision dans les modèles économiques autoregressifs», *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 29, n° 2.
208. E. Malinvaud (1970), «The Consistency of Non-Linear Regressions», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41, № 3, 956—969.
209. B. Mandelbrot (1962), «Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy», *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 mai 1962.
210. B. Mandelbrot (1963), «New Methods in Statistical Economics»: *Journal of Political Economy*, October 1963.
211. B. Mandelbrot (1963), «The Variation of Certain Speculative Prices», *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 36, n° 4, oct. 1963.
212. H. B. Mann and A. Wald (1943), «On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations», *Econometrica*, juillet 1943.
213. A. A. Markoff (1912), *Wahrscheinlichkeitrechnung*, chap. 7, traduction H. Liebmann, seconde édition, Leipzig et Berlin.
214. D. W. Marquardt (1963), «An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters», *Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics*, vol. 11, n° 2, June 1963.
215. J. Marschak (1953), *Economic Measurement for Policy and Prediction*, dans W. C. Hood and T. C. Koopmans ed (1953).
216. J. Marschak et W. H. Andrews (1944), «Random Simultaneous Equations and the Theory of Production», *Econometrica*, juillet 1944.
217. J. Méraud et A. Tymen (1960), «Les variations saisonnières de l'activité économique», *Études et conjoncture*, avril 1960.
218. J. R. Meyer and H. L. Miller Jr. (1954), «Some Comments on the „Simultaneous Equation Approach”», *Review of Economics and Statistics*, février 1954.
219. F. Modigliani and R. Brumberg (1955), «Utility Analysis and the Consumption Function. An Interpretation of Cross-Section Data» — dans K. K. Kurihara ed., *Post-Keynesian Economics*, George Allen and Unwin, Londres.
220. A. Mood (1950), *Introduction to the Theory of Statistics*, Mc Gr w-Hill Book Company, Inc. New York, 1950.
221. H. L. Moore (1914), «Economic Cycles: Their Law and Cause»—Macmillan Co., New York.
222. E. Morice (1938), «Loi de la demande d'un service monopolisé», *Econometrica*, vol. 6.
223. E. Morice (1958), «Quelques tests non paramétriques», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, octobre-décembre 1958.
224. E. Morice et F. Chartier (1954), *Analyse statistique*, Imprimerie nationale, Paris.

225. G. Morlat (1963), «Modèle pour les chroniques économiques mensuelles», *Revue de Statistique appliquée*, Vol. XI, n° 2.
226. A. L. Nagar (1959), «The Bias and Moment Matrix of the General K-Class Estimators of the Parameters in Simultaneous Equations», *Econometrica*, octobre 1959.
227. A. L. Nagar (1960), «A Monte Carlo Study of Alternative Simultaneous Equations Estimators», *Econometrica*, juillet 1960.
228. M. Nakamura (1960), «A Note on the Consistency of Simultaneous Least Squares Estimation», *International Economic Review*, septembre 1960.
229. W. A. Neiswanger et T. A. Yancey* (1959), «Parameter Estimates and Autonomous Growth», *Journal of the American Statistical Association*, juin 1959.
230. M. Nerlove (1958), «Distributed Lags and Demand Analysis for Agricultural and other Commodities», *Agricultural Handbook* n° 141, U. S. Department of Agriculture.
231. M. Nerlove (1963), «Returns to Scale in Electricity Supply», in Y. Grunfeld (1963).
232. M. Nerlove (1964), «Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures», *Econometrica*, juillet 1964.
233. M. Nerlove (1965), *Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions*, North-Holland Pub. Company, Amsterdam, 1965.
234. N. F. Nettheim (1965), «Fourier Methods for Evolving Seasonal Patterns», *Journal of the American Statistical Association*, June, 1965.
235. J. von Neumann (1941), «Distribution of the Ratio of the Mean-Square Successive Difference to the Variance», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 12.
236. J. Neyman (1951), «Existence of Consistent Estimates of the Directional Parameter in a Linear Structural Relation between two Variables», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22.
237. J. Neyman and E. Scott (1948), «Consistent Estimates Based on Partially Consistent Observations», *Econometrica*, vol. 16, 1948.
238. J. Neyman and E. Scott (1951), «On Certain Methods of Estimating the Linear Structural Relation», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, p. 352, et vol. 23, p. 115.
239. I. Olkin and others (1960), *Contributions to Probability and Statistics; Essays in Honor of Harold Hotelling*, Stanford University Press, Stanford.
240. G. H. Orcutt (1950), «Measurement of Price Elasticities in International Trade», *Review of Economics and Statistics*, vol. 32.
241. E. Parzen (1967), «On Empirical Multiple Time Series», in L. Le Cam and J. Neyman, ed., *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*.
242. E. S. Pearson (1931), «The Analysis of Variance in Case of Non-Normal Variation», *Biometrika*.
243. E. S. Pearson and H. O. Hartley (1951), «Charts of the power function of the analysis of variance tests, derived from the non-central F-distribution», *Biometrika*, vol. 38, p. 112—130.
244. A. W. Phillips (1956), «Some notes on the estimation of time-forms of reactions in interdependent systems», *Economica*.
245. A. C. Pigou (1943), «The Classical Stationary State», *The Economic Journal*, déc. 1943.
246. K. C. S. Pillai (1967), «Upper Percentage Points of the Largest Characteristic Root of a Matrix in Multivariate Analysis», *Biometrika*, vol. 54, p. 189—194.
247. K. C. S. Pillai and P. Samson Jr. (1959), «On Hotelling's Generalization of T^2 », *Biometrika*, 46, 160.
248. R. L. Plackett (1949), «A Historical Note on the Method of Least Squares», *Biometrika*, vol. 36, part 3 et 4, p. 458.
249. S. J. Preais and J. Aitchison (1954), «The Grouping of Observations in Regression Analysis», *Revue de l'Institut International de Statistique*, p. 1 à 22.

250. S. J. Prais and H. S. Houthakker (1955), *The Analysis of Family Budgets*, The University Press, Cambridge.
251. E. Quinet (1969), *Séries temporelles et décisions économiques*, Dunod, Paris.
252. R. Radner (1958), «Minimax Estimation for Linear Regressions», *Annals of Mathematical Statistics*, décembre 1958.
253. H. Raiffa and R. Schlaifer (1961), *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University Press, Boston.
254. C. R. Rao (1965), *Linear Statistical Inference and its Applications*, John Wiley, New York.
Р а о С. Р. Линейные статистические модели и их применение. М., «Наука», 1968.
255. O. Reiersol (1945), «Confluence Analysis by Means of Instrumental Sets of Variables», *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, vol. 32.
256. O. Reiersol (1950 a), «Identifiability of a Linear Relation between Variables which are Subject to Error», *Econometrica*, vol. 18.
257. O. Reiersol (1950 b), «On the Identifiability of Parameters in Thurstone's Multiple Factor Analysis», *Psychometrika*, vol. 15.
258. M. Rosenblatt (1956), «Some Regression Problems in Time Series Analysis», *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1.
259. M. Rosenblatt, ed (1963), *Time Series Analysis*, John Wiley, New York.
260. T. Rothenberg (1968 a), «The Value of Structural Information: a Bayesian Approach», Mimeographed CORE, Louvain.
261. T. Rothenberg (1968 b), «Estimation with Inequality Restrictions», Mimeographed, CORE Louvain.
262. T. Rothenberg, F. M. Fisher and C. B. Tilanus (1964), «A Note on Estimation from a Cauchy Sample», *Journal of the American Statistical Association*, June 1964.
263. G. Rottier (1958), «La distribution des revenus non agricoles», *Consommations*, janv. 1958.
264. G. Rottier (1959), «Niveau de vie et consommation de la population non agricole», *Consommation*, n° 3, 1959.
265. R. Roy (1958), *Éléments d'économétrie*, Cours à l'École d'Application de l'INSEE, INSEE, Paris.
266. H. Rubin (1950), «Consistency of Maximum-Likelihood Estimates in the Explosive Case», dans T. C. Koopmans ed. (1950).
267. P. A. Samuelson (1948), *Economics*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1948; ou *L'Économique*, traduction de Gaël Fain, Librairie Armand Colin, Paris, 1957.
268. J. D. Sargan (1958), «The Estimation of Economic Relationships using Instrumental Variables», *Econometrica*, juillet 1958.
269. J. D. Sargan (1961), «The Maximum Likelihood Estimation of Economic Relationships with Autoregressive Residuals», *Econometrica*, juil. 1961.
270. J. D. Sargan (1964), «Wages and Prices in the United Kingdom: A Study in Econometric Methodology», *Proceedings of the 16th Symposium of the Colston Research Society held in the University of Bristol* (Buttersworths Scientific Publications, London).
271. L. J. Savage (1954), *The Foundations of Statistics*, New York.
272. H. Scheffé (1959), *The Analysis of Variance*, John Wiley, New York, 1959.
Ш е ф ф е Г. Дисперсионный анализ. М., Физматгиз, 1963.
273. P. Schö n f e l d (1967), «Generalized Best Linear Unbiased Estimation», CORE discussion papers, Louvain.
274. P. Schö n f e l d (1971), «A Useful Central Limit Theorem for m-Dependent Variables», *Metrika*, April 1971.
275. H. Schult z (1938), *The Theory and Measurement of Demand*, Chicago University Press.
276. G. A. F. Seber (1964), «Linear Hypotheses and Induced Tests», *Biometrika*, vol. 51, juin 1964.

277. J. Shiskin and H. Eisenpress (1958), «Seasonal Adjustments by Electronic Computer Methods», National Bureau of Economic Research, *Technical Paper* 12. Traduction française dans le Bulletin d'Information de l'I.N.S.E.E., juin 1958.
278. S. D. Silvey (1968), «Multicollinearity and Imprecise Estimation», Mimeographed, University of Glasgow.
279. E. Slutsky (1937), «The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes», *Econometrica*, vol. 5.
280. R. Solow (1960), «On a Family of Lag Distributions», *Econometrica*, avril 1960.
281. H. Staehle (1945), «Relative Prices and Postwar Markets for Food Products», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 59.
282. C. Stein (1956 a), «Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution». *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, 1956.
283. C. Stein (1956 b), «The Admissibility of Hotelling's T^2 -Test», *Annals of Mathematical Statistics*, sept. 1956.
284. R. Stone (1954 a), *The Measurement of Consumer's Expenditure and Behavior in the United Kingdom 1920—38*, Cambridge University Press.
285. R. Stone (1954 b), «Linear Expenditure Systems and Demand Analysis an Application to the Pattern of British Demand», *Economic Journal*, septembre 1954, vol. 64.
286. R. Stone and D. A. Rowe (1956), «Aggregate Consumption and Investment Functions for the Household Sector Considered in the Light of British Experience», *Nationalökonomisk Tidskrift*, vol. 94; p. 1—32.
287. R. Summers (1965), «A Capital Intensive Approach to the Small Sample Properties of Various Simultaneous Equation Estimators», *Econometrica*, janvier 1965.
288. F. S. Swed and C. Eisenhart (1943), «Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 14.
289. H. Theil (1951), «Estimates and their Sampling Variance of Parameters of certain Heteroscedastic Distributions», *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 19, n° 2, p. 141.
290. H. Theil (1954), *Linear Aggregation of Economic Relations*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1954.
291. H. Theil (1958), *Economic Forecasts and Policy* (cf. notamment chapitre 6), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
- Г. Те й л. Экономические прогнозы и принятие решений. М., «Статистика», 1971.
292. H. Theil (1965), «The Analysis of Disturbances in Regression Analysis», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 60.
293. H. Theil and A. S. Goldberger (1960), «On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics», *International Economic Review*, vol. 2.
294. H. Theil and R. M. Stern (1960), «A Simple Unimodal Lag Distribution», *Metroeconomica*, vol. 12.
295. P. Thionet (1966), «Sur certains tests non paramétriques bien connus», *Revue de l'Institut international de statistique*, vol. 34, n° 1.
296. G. C. Tiao and A. Zellner (1964), «On the Bayesian Estimation of Multivariate Regression», *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, n° 26, p. 277—285.
297. J. Tinbergen (1949), «Long-Term Foreign Trade Elasticities», *Metroeconomica*.
298. G. Tintner (1940), *The Variate-Difference Method*, Bloomington Press, Indiana.
299. G. Tintner (1946), «Multiple Regression for Systems of Equations», *Econometrica*, vol. 14.
300. G. Tintner (1952), *Econometrics*, John Wiley, New York.
301. J. W. Tukey (1960), «Sampling from Contaminated Distributions», dans I. Olkin and others (1960).

302. S. Valavanis (1959), *Econometrics — An Introduction to Maximum Likelihood Methods*, Mac Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959.
303. G. Vangrevelinghe (1966), «L'évolution à court terme de la consommation des ménages», *Études et Conjonctures*, septembre 1966.
304. A. Vessereau (1960), *Méthodes statistiques en biologie et en agronomie*, J. B. Baillière et fils, Paris.
305. J. Voranger (1957), «Analyse de l'influence de la dépense totale et de la catégorie socio-professionnelle sur la dépense de chaussures», *Annales de Recherches et de Documentation sur la Consommation*, 3^e année, n° 4, octobre-décembre 1957.
306. H. Wagner (1958), «A Monte Carlo Study of Estimates of Simultaneous Linear Structural Equations», *Econometrica*, janvier 1958.
307. A. Wald (1940), «The Fitting of Straight Lines if both Variables are Subject to Errors», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 11, p. 284—300.
308. A. Wald (1948), «Estimation of a Parameter when the Number of Unknown Parameters Increases Indefinitely with the Number of Observations», *Annals of Mathematical Statistics*, juin 1948.
309. A. Wald (1950 a), *Statistical Decision Functions*, John Wiley, New York, 1950.
310. A. Wald (1950 b), «Note on the Identification of Economic Relations», dans T. C. Koopmans ed. (1950).
311. K. F. Wallis (1967), «Lagged Dependent Variables and Serially Correlated Errors: A Reappraisal of Three-Pass Least Squares», *The Review of Economics and Statistics*, nov. 1967.
312. L. Walras (1874), *Éléments d'économie politique pure*, éd. F. Rouge, Lausanne.
313. A. A. Walters (1963), «Production and Cost Functions: An Econometric Survey», *Econometrica*, janv.-avril 1963.
314. G. S. Watson (1955), «Serial Correlation in Regression», Analysis», *Biometrika*, vol. 42, p. 327.
315. G. S. Watson (1956), «On the Joint Distribution of the Circular Serial Correlation Coefficients», *Biometrika*, vol. 43.
316. G. S. Watson (1967), «Linear Least Squares Regression», *Annals of Mathematical Statistics*, Dec. 1967.
317. L. Wegge (1965), «Identifiability Criteria for a System of Equations as a Whole», *The Australian Journal of Statistics*, nov. 1965.
318. B. L. Welch (1937), «The Significance of the Difference between two Means when the Population Variances are Unequal», *Biometrika*.
319. E. Whittaker and G. Robinson (1924), *The Calculus of Observations*, Blackie and Son Limited, Londres et Glasgow.
320. P. Whittle (1954), «Some Recent Contributions to the Theory of Stationary Processes» (Appendix 2), dans H. Wold, *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2^e édition, Stockholm, 1954.
321. P. Whittle (1961), «Gaussian Estimation in Stationary Time Series», *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 33^e session, Paris, 1961.
322. N. Wiener (1949), *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, New York, 1949.
323. D. J. Wilde (1964), *Optimum Seeking Methods*, Prentice Hall.
Д. Уайлд. Методы поиска экстремума, М., «Мир», 1968.
324. S. S. Wilks (1944), *Mathematical Statistics*; notamment «An Introduction to Multivariate Statistical Analysis» (Chapitre XI), Princeton University Press, New Jersey.
Русск. перевод с изд. 1962 г.: С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
325. H. Wold (1938), *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2nd edition, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1954.
326. H. Wold (1952), *Demand Analysis — A Study in Econometrics*, Uppsala and New York.
327. H. Wold (1954), «Causality and Econometrics», *Econometrica*, avril 1954.
328. H. Wold (1955), «Possibilités et limitations des systèmes à chaîne causale», *Cahiers du Séminaire d'Econométrie*, n° 3, C.N.R.S., Paris.

329. H. W o l d (1960 a), «A Generalization of Causal Chain Models», *Econometrica* vol. 28, n° 2, avril 1960.
330. H. W o l d (1960 b), «Ends and Means of Econometric Model Building», dans: U. Grenander ed., *Probability and Statistics*. The Harald Cramer volume: Almqvist and Wiksell, Stockholm.
331. H. W o l d (1964), ed. *Econometric Model Building; Essays on the Causal Chain Approach*, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
332. H. W o l d and P. F a x e r (1957), «On the Specification Error in Regression Analysis», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, n° 1, mars 1957.
333. J. W o l f o w i t z (1952), «Consistent Estimators of the Parameters of a Linear Structural Relation», *Skandinavisk Actuarietidskrift*, 1952.
334. J. W o l f o w i t z (1954 a), «Estimation of the Components of Stochastic Structures», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 40.
335. J. W o l f o w i t z (1954 b), «Estimation by the Minimum Distance Method in Nonparametric Difference Equations», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 25.
336. J. W o l f o w i t z (1954 c), «Estimation of Structural Parameters when the Number of Incidental Parameters is Unbounded». Abstract. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 25.
337. E. J. W o r k i n g (1927), «What do «Statistical Demand Curves» Show?», *Quarterly Journal of Economics*, février 1927.
338. H. W o r k i n g (1925), «The Statistical Determination of Demand Curves», *Quarterly Journal of Economics*, août 1925.
339. G. U. Y u l e (1921), «On the Time-Correlation Problem», *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 84.
340. A. Z e l l n e r (1957), «The Short-Run Consumption Function», *Econometrica*, vol. 25, oct. 1957.
341. A. Z e l l n e r (1961, a), «Linear Regression with Inequalities Constraints on the Coefficients: An Application of Quadratic Programming and Linear Decision Rules», International Center for Management Science, Rotterdam, 1961.
342. A. Z e l l n e r (1961, b), «Econometric Estimation with Temporally Dependent Disturbance Terms», *International Economic Review*, mai 1961.
343. A. Z e l l n e r (1962), «An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias», *Journal of the American Statistical Association*, juin 1962.
344. A. Z e l l n e r et H. T h e i l (1962), «Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations», *Econometrica*, janv. 1962.
345. A. Z e l l n e r (1963), «Estimators of Seemingly Unrelated Regression Equations: Some Exact Finite Sample Results», *Journal of the American Statistical Association*, Dec. 1963.
346. A. Z e l l n e r (1968), «Bayesian Inference in Econometrics», Mimeographé, University of Rome.
347. A. Z e l l n e r and G. C. T i a o (1964), «Bayesian Analysis of the Regression Model with Autocorrelated Errors», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 59, p. 763—778.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Часть 4	
Выравнивание временных рядов	8
Глава 11. Введение в теорию случайных процессов	8
1. Временные связи в эконометрических моделях	8
2. Случайные величины и случайные функции	9
3. Стационарные процессы	11
4. Спектральное представление	13
5. Скользящие средние	19
6. Авторегрессионные и гармонические процессы	22
7. Линейное представление	26
8. Прогноз для стационарных процессов	28
9. Эргодичность	30
Глава 12. Статистический анализ временных рядов	32
1. Введение	32
2. Главные характеристики ряда	33
3. Непараметрические критерии независимости	41
4. Критерии независимости для моментов второго порядка	44
5. Критерии независимости для периодограммы	46
6. Оценка коррелограммы	49
7. Оценка спектра стационарного процесса	51
8. Параметрическое разложение временного ряда	62
9. Линейные фильтры для разложения временного ряда	65
10. Спектральный анализ нестационарных рядов	71
11. Какие ряды использовать для статистических оценок?	77
12. Спектральный анализ зависимостей между рядами	79
Глава 13. Зависимость между ошибками в моделях регрессии	93
1. Взаимозависимость ошибок	93
2. Критерии независимости ошибок	95
3. Асимптотические свойства регрессий	102
4. Процессы ошибок и характеристики остатков	104
5. Дисперсии оценок и критерии гипотез	109
6. Эффективность метода наименьших квадратов	113
7. Оценки в моделях с зависимыми ошибками	115
8. Прогноз в моделях с зависимыми ошибками	123

Глава 14. Авторегрессионные модели 126

1. Эндогенные переменные с запаздыванием в экономических моделях 126
2. Асимптотические свойства метода наименьших квадратов 128
3. Выравнивание по методу наименьших квадратов в малых выборках 138
4. Прогнозирование 140
5. Зависимость ошибок и выравнивание методом наименьших квадратов 142
6. Различные методы учета зависимости ошибок 150

Глава 15. Модели с распределенными запаздываниями 157

1. Введение 157
2. Модели с распределенными запаздываниями в эконометрии 161
3. Гипотезы относительно коэффициентов модели 164
4. Прямая оценка с помощью линейных и нелинейных регрессий 168
5. Оценка методом наименьших квадратов авторегрессионной формы 173
6. Другие оценки для авторегрессионной формы 177

Часть 5

Модели из систем уравнений 181

Глава 16. Модели из систем уравнений в эконометрических исследованиях 181

1. Структурные и приведенные уравнения 181
2. Спрос и предложение. Проблемы идентификации . . . 186
3. Оценка законов спроса 189
4. Рекурсивные модели 194
5. Структурные уравнения и теоретические регрессии 198
6. Оценка производственных функций 200
7. Эластичность по ценам в международной торговле . . . 204

Глава 17. Проблемы оценки в свете отдельных примеров 207

1. Косвенные регрессии 207
2. Ограничения на распределение ошибок 213
3. Оценка отдельного уравнения в переопределенной (сверхидентифицированной) модели 218
4. Использование регрессий в рекурсивных моделях . . . 224

Глава 18. Идентификация 228

1. Структурная форма моделей 228
2. Приведенная форма модели 232
3. Определения 234
4. Случай, когда ограничения не относятся к ошибкам 238
5. Линейные ограничения на коэффициенты одного и того же уравнения. Критерий идентифицируемости 240
6. Критерий переопределения (сверхидентификации) . . . 244
7. Обобщения 247

Г л а в а 19. Общие методы оценивания систем регрессионных уравнений	251
1. Структурная и приведенная формы	251
2. Простые модели	256
3. Оценки по минимальному расстоянию и квазimaxимума правдоподобия	258
4. Ограничения для ковариационной матрицы ошибок	261
5. Рекурсивные модели	262
6. Вычислительные методы для моделей, содержащих только исключающие ограничения	264
Г л а в а 20. Оценка отдельного уравнения в модели из системы уравнений	275
1. Принцип получения оценок при ограниченной информации	275
2. Оценки по минимальному расстоянию для уравнения без экзогенных переменных	278
3. Метод Комиссии Коулса	284
4. Двухшаговый метод наименьших квадратов	288
5. Инструментальные переменные	296
6. Главные компоненты экзогенных переменных	299
7. Распределение в малых выборках	301
Эпилог	306
Библиография	307

СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОГО ВЫПУСКА

Вступительная статья

Часть 1

Введение

Глава 1. Эконометрия без вероятностных моделей.

1. Предварительные замечания. 2. Графическое выравнивание данных. 3. Простые регрессии. 4. Ортогональная регрессия. 5. Недостаточность методов, в которых применяется понятие вероятности. 6. Обозначения. 7. Множественные регрессии. 8. Регрессия относительно двух переменных. 9. Сравнение различных множественных регрессий. 10. Главные компоненты. 11. Ортогональные регрессии. 12. Замена переменных. 13. Связи между различными регрессиями.

Глава 2. Экономические модели и статистические выводы

1. Представление экономических явлений. 2. Первый пример: предложение и спрос на конкурентном рынке. 3. Второй пример: элементарная модель Кейнса. 4. Третий пример: закон спроса. 5. Эндогенные и экзогенные переменные. 6. Причинность и рекурсивные модели. 7. Вероятностные модели. 8. Модели и структуры. 9. Проблема статистических выводов. 10. Идентифицируемость. 11. Байесовы принципы статистических выводов. 12. Априорная вероятность и функция правдоподобия. 13. Классические принципы статистических выводов. 14. Непараметрические модели. 15. Прогноз. 16. Ошибки спецификации.

Глава 3. Линейная модель простой регрессии

1. Модель. 2. Основная гипотеза. 3. Другие гипотезы. 4. Выравнивание по методу наименьших квадратов. 5. Важное свойство метода наименьших квадратов. 6. Роль гипотезы нормальности. 7. Свойства метода наименьших квадратов. 8. Регрессия для двумерных законов распределения. 9. Прогнозирование. 10. Регрессия в байесовой статистике.

Глава 4. Функция потребления. Обсуждение одной эконометрической проблемы

1. Введение. 2. Регрессия и прогноз на основе глобальных данных для периода между двумя мировыми войнами. 3. Модель, задаваемая системой одновременных уравнений. 4. Краткосрочные и долгосрочные эффекты. 5. Функции индивидуальных сбережений и функция глобальных сбережений. 6. Макроэкономическое использование микроэкономических данных. 7. Наблюдаемый доход и перманентный доход. 8. Заключение

Линейное выравнивание

Глава 5. Общая теория линейного выравнивания

1. Линейная гипотеза. 2. Характеристический эллипсоид случайного вектора. 3. Линейные оценки. 4. Векторы и линейные многообразия, сопряженные относительно характеристического эллипсоида. 5. Обобщенный метод наименьших квадратов. 6. Приложения. 7. Гипотеза нормальности. 8. Проверка одной важной гипотезы. 9. Оптимальные свойства оценки Гаусса — Маркова. 10. Исторические замечания. Приложение 1. Аналитическое рассмотрение теоремы Гаусса — Маркова. 1. Теорема Гаусса — Маркова. 2. Приложение к множественным многомерным регрессиям. Приложение 2. Некоторые правила матричного исчисления. 1. Дифференцирование векторов и матриц. 2. Операция вычисления следа матрицы. 3. Минимизация положительно-определенных квадратичных форм при линейных ограничениях. 4. Приложения

Глава 6. Множественные регрессии

1. Основная модель. 2. Множественные регрессии и линейное выравнивание. 3. Метод наименьших квадратов. 4. Выравнивание оценок и их характеристического эллипсоида. 5. Приложения. 6. Эффект коллинеарности. 7. Нормальное распределение ошибок. 8. Асимптотические свойства. 9. Проверка гипотез и доверительные области. 10. Прогнозирование эндогенных переменных. 11. Байесова теория. Приложение. Центральная предельная проблема

Глава 7. Дисперсионный и ковариационный анализ

1. Введение. 2. Дисперсионный анализ в общей модели линейного выравнивания. 3. Последовательные гипотезы. 4. Ортогональные гипотезы. 5. Гипотезы, относящиеся к простой регрессии. 6. Какие экзогенные переменные включать в модели множественной регрессии? 7. Дисперсионный анализ классифицированных наблюдений. 8. Ковариационный анализ. 9. Многомерный анализ

Глава 8. Различные дополнения

1. Фиктивные экзогенные переменные. 2. Регрессии по сгруппированным данным. 3. Одновременное применение нескольких выборок. 4. Общая линейная модель и одновременная оценка нескольких уравнений регрессии. 5. Неточная спецификация распределения ошибок. 6. Неточная спецификация соотношений

Часть 3

Две важные вероятностные модели

Глава 9. Нелинейные модели с аддитивными ошибками

1. Общие соображения. 2. Асимптотическая теория нелинейных регрессий. 3. Нормальные ошибки и оценки максимального правдоподобия. 4. Вычисление нелинейных регрессий. 5. Линейные модели с аналитическими ограничениями. 6. Пример. 7. Доверительные области для моделей с ограничениями. 8. Ограничения в форме линейных неравенств

Глава 10. Линейные модели с ошибками в переменных

1. Предварительные замечания. 2. Обозначения и гипотезы. 3. Ошибки в переменных и регрессия по методу наименьших квадратов. 4. Взвешенная регрессия. 5. Свойства взвешенной регрессии. 6. Взвешенная регрессия и ковариация ошибок. 7. Инструментальные переменные. 8. Идентификация и спецификация модели. 9. Группировка данных. 10. Исторические замечания
Библиография

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

С 1977 года издательство «Статистика» начинает издание новой серии теоретических трудов зарубежных ученых «Зарубежная математическая статистика (для экономических приложений)».

Первыми книгами этой серии будут:

Ли Т., Джадж Г., Зельнер А. Оценка параметров марковской вероятностной модели.

Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.

Ниже даются аннотации на первые книги:

Ли Т., Джадж Г., Зельнер А. Оценка параметров марковской вероятностной модели. Амстердам. 1970. Пер. с англ. 18 л., с ил. (Зарубежная математическая статистика [для экономических приложений]), 1 р. 90 к. В пер.

Среди типовых моделей, рекомендуемых для практического применения в работах по исследованию операций и экономико-математическому моделированию, важное место занимают марковские цепи. Предлагаемая работа знакомит читателей с современными методами определения переходных вероятностей марковских цепей по статистическим данным, что крайне необходимо при работе с подобными моделями. Монография написана с четких методических позиций, на современном научном уровне и не имеет аналогов в современной литературе.

Может быть рекомендована широкому кругу экономистов и статистиков, научных работников и практиков, занимающихся моделированием экономических и других процессов, а также аспирантам и студентам старших курсов.

Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений. США. 1968. Пер. с англ. 28 л., с ил. (Зарубежная математическая статистика [для экономических приложений]), 3 руб. В пер.

Книга профессоров Гарвардской Школы Деловой администрации Говарда Райфы и Роберта Шлейфера «Прикладная теория статистических решений» посвящена проблеме управления в условиях неопределенности. В качестве аппарата исследования авторы пользуются байесовским статистическим анализом, развитию которого в книге отведено значительное место. Особенно подробно изложены методы байесовской теории решений, которые достаточно разработаны для того, чтобы их можно было применять при исследовании конкретных экономических задач.

Работа Г. Райфы и Р. Шлейфера одна из наиболее широко цитируемых работ в области прикладной теории статистических решений.

Знакомство с книгой будет очень полезным широкому кругу статистиков, экономистов и инженеров, применяющих в своих исследованиях математико-статистические методы, а также студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в области статистики и прикладной математики.

Вы можете заказать интересующие Вас книги в местных книжных магазинах.

ЭДМОНД МАЛЕНВО

Статистические методы эконометрии

В ы п у с к 2

Редактор *К. М. Чижевская*

Техн. редактор *Г. А. Полякова*

Корректоры *Г. А. Башарина, А. Т. Сидорова*

Худ. редактор *Т. В. Стихно*

Переплет художника *Л. С. Эрмана*

Сдано в набор 5/VIII 1975 г. Подп. к печ. 11/XII 1975 г.

Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бумага № 3. Объем 20,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 22,25. Усл. п. л. 20,5. Тираж 7 000 экз.

(Тематич. план 1976 г. № 116)

Заказ № 399.

Цена 1 р. 55 к.

Издательство «Статистика», Москва, ул. Кирова, 39.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Москва, И-41, Б. Переяславская, д. 46.